AUG 1 3 1932

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 168

Heft 2

Ausgegeben den 25. Juli 1932

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1932

Band 168. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Thum, P. B., Lösung von Randwertaufgaben der Wärmelehre und Potentialtheorie durch Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen 65

Heegner, Kurt, Über eine algebraische Aufgabe, welche in der Reduktions- und Transformationstheorie der algebraischen Funktionen auftritt 91

Estermann, Theodor, Eine neue Darstellung und neue Anwendungen der Viggo Brunschen Methode 106

Hensel, Kurt, Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen 117

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Lösung von Randwertaufgaben der Wärmelehre und Potentialtheorie durch Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen.

Von *P. B. Thum* in Rom.

Einleitung.

0,1. Die folgenden Untersuchungen behandeln Randwertaufgaben für *Differentialgleichungen* des parabolischen bzw. elliptischen Typus von folgender Bauart:

$$(P) \qquad g(x)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - l(x)\,u(x,t)$$

bzw.

$$(E) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right) + g(x)\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - l(x)\,v(x,t) = 0.$$

Dabei seien $g(x)$, $k(x)$ und $l(x)$ reelle, eindeutige und stetige Funktionen der reellen Veränderlichen x in $\langle 0, 1\rangle$, für die außerdem stets die Ungleichungen

$$k(x) > 0, \quad g(x) > 0, \quad l(x) \geqq 0$$

in Geltung sind. Die reelle Veränderliche t ist auf $t > 0$ beschränkt.

Als *Randbedingungen* in $x = 0$ und $x = 1$ werden sowohl im parabolischen wie im elliptischen Fall vorgeschrieben:

$$(R_x) \qquad \begin{aligned} \left[a_1 \cdot u(x,t) - a\,\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0} &= 0, \qquad a_1 \cdot a \geqq 0, \\ \left[b_1 \cdot u(x,t) - b\,\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=1} &= 0, \qquad b_1 \cdot b \geqq 0, \end{aligned}$$

und entsprechend für $v(x,t)$. Als „Randbedingung" in $t = 0$ wird nur gefordert, daß die Lösungen für $t \to 0$ im Sinn der mittleren Kongervenz gegen eine auf dem Rande $t = 0$ vorgegebene Funktion $f(x)$, die im Sinne von Lebesgue in $\langle 0, 1\rangle$ quadratisch integrierbar ist [1]), konvergieren; es soll also gelten:

$$(R_t) \qquad \lim_{t\to 0} \int_0^1 [u(x,t) - f(x)]^2\,dx = 0$$

bzw.

$$\lim_{t\to 0} \int_0^1 [v(x,t) - f(x)]^2\,dx = 0\,,$$

woraus für „fast alle" Punkte aus $\langle 0, 1\rangle$

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{t\to 0} v(x,t) = f(x)$$

folgt.

[1]) Mit $(f(x))^2$ ist stets auch $f(x)$ und $|f(x)|$ im L-Sinne integrierbar.

Im elliptischen Fall fordern wir überdies entweder

$$(R_t^{\infty}) \qquad \text{(Fall 1)} \qquad \lim_{t\to\infty} \int_0^1 [v(x,t)]^2\, dx = 0$$

oder

$$(R_t^{1}) \qquad \text{(Fall 2)} \qquad \lim_{t\to 1} \int_0^1 [v(x,t)]^2\, dx = 0.$$

Die Lösungen sollen im Bereichinneren eindeutige, stetige Funktionen in x und t sein.

0, 2. Das Neuartige der gewählten Problemstellung liegt in den Randbedingungen (R_t), die an die Stelle der üblichen Forderungen $u(x, 0) = f(x)$ bzw. $v(x, 0) = f(x)$ treten. Die folgenden Untersuchungen werden zeigen, daß die Bedingungen (R_x) und (R_t) einerseits hinreichen, um die Eindeutigkeit der Lösung zu sichern und andrerseits weit genug gefaßt sind, um für alle quadratisch integrierbaren $f(x)$ die Existenz einer Lösung zu garantieren.

Macht man im parabolischen Fall bzw. in den elliptischen Fällen 1 und 2 den Ansatz

$$(0,1) \quad u(x,t) = e^{-\varrho^2 t} V(x) \quad \text{bzw.} \quad v^{(1)}(x,t) = e^{\pm \varrho t} V(x) \quad \text{bzw.} \quad v^{(2)}(x,t) = \frac{\mathfrak{Sin}\, \varrho(1-t)}{\mathfrak{Sin}\, \varrho} V(x),$$

so erhält man für $V(x)$ die Differentialgleichung

$$(0,2) \qquad \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dV}{dx}\right) + [g(x)\cdot \varrho^2 - l(x)]\, V(x) = 0$$

mit den Randbedingungen

$$(0,3) \qquad a_1 \cdot V(0) - a\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad \text{und} \quad b_1 \cdot V(1) + b\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=1} = 0.$$

Bei der Behandlung des Randwertproblems in seiner bisher üblichen Fassung ging man von der Reihendarstellung der Funktion $f(x)$ nach den Eigenfunktionen der Sturm-Liouvilleschen Randwertaufgabe (0, 2), (0, 3) aus und untersuchte, unter welchen Voraussetzungen durch die Reihen

$$(0,4) \quad \sum_1^{\infty} e^{-\varrho_\nu^2 t} c_\nu \varphi_\nu(x), \qquad \sum e^{-\varrho_\nu t} c_\nu \varphi_\nu(x), \qquad \sum \frac{\mathfrak{Sin}\, \varrho_\nu(1-t)}{\mathfrak{Sin}\, \varrho_\nu} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

wirklich Lösungen der gestellten Probleme geliefert werden. Die ϱ_ν bezeichnen dabei die Eigenwerte und die $\varphi_\nu(x)$ die Eigenfunktionen des Problems (0, 2), (0, 3). Dieses Vorgehen zwang zu weitgehenden Einschränkungen in der Wahl der Funktion $f(x)$, um die Konvergenz von

$$\sum_1^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

und die Differenzierbarkeit der Entwicklungen (0, 4) nach x sicherzustellen.

Bei unserer Randwertaufgabe hingegen ist sozusagen nicht mehr das Verhalten der formalen Lösungsansätze für $t = 0$, sondern für $t > 0$ maßgebend; gegen die vorgegebene Randfunktion $f(x)$ sollen die Lösungen nur „im Mittel" konvergieren.

0, 3. Beim Existenzbeweis im Fall unserer Probleme gehen wir ebenfalls von formalen Ansätzen aus, die wir durch eine kleine Modifikation des Cauchyschen Verfahrens [2]) in folgender Gestalt gewinnen:

---

[2]) Vgl. Enzykl. d. Math. Wissensch. II C 11 (Hilb-Szász), Seite 1260 ff.

$$(0,5)\qquad u(x,t)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\varrho\,e^{-\varrho^2 t}\,d\varrho\int_0^1 G(x,\xi;\varrho^2)\,f(\xi)\,d\xi,$$

$$(0,6)\qquad v^{(1)}(x,t)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{D_k}\varrho\,e^{\mp\varrho t}\,d\varrho\int_0^1 G(x,\xi;\varrho^2)\,f(\xi)\,d\xi,$$

$$(0,7)\qquad v^{(2)}(x,t)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\varrho\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho\,(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}\,d\varrho\int_0^1 G(x,\xi;\varrho^2)\,f(\xi)\,d\xi.$$

$G(x,\xi;\varrho^2)$ bezeichnet dabei die Greensche Funktion der Randwertaufgabe (0, 2), (0, 3); C_k und D_k sind geeignet zu wählende Integrationswege, die für $k\to\infty$ alle Pole der in ϱ meromorphen Greenschen Funktion umschließen. Um den Existenzbeweis zu führen, zeigen wir:

1. $u(x,t)$, $v^{(1)}(x,t)$ und $v^{(2)}(x,t)$ sind in x und (für $t>0$) in t stetige, zweimal nach x und einmal bzw. zweimal nach t stetig differenzierbare Funktionen, die also zufolge bekannter Eigenschaften der Greenschen Funktion Lösungen der Gleichungen (P) bzw. (E) darstellen und die Randbedingungen (R_x) erfüllen (§ 3).

2. Unter Voraussetzung eines quadratisch integrierbaren $f(x)$ gilt:

$$\lim_{t\to 0}\int_0^1[u(x,t)-f(x)]^2=0,$$

$$\lim_{t\to 0}\int_0^1[v^{(1)}(x,t)-f(x)]^2\,dx=0,\quad \lim_{t\to 0}\int_0^1[v^{(2)}(x,t)-f(x)]^2\,dx=0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^1[v^{(1)}(x,t)]^2=0\quad\text{und}\quad\lim_{t\to 1}\int_0^1[v^{(2)}(x,t)]^2\,dx=0.$$

0, 4. Wir werden zunächst in § 1 den Eindeutigkeitsbeweis erbringen und in den §§ 3–7 den Existenzbeweis durchführen. In § 4 wird gezeigt, daß $u(x,t)$ für $t\to 0$ fast überall gegen $f(x)$ konvergiert, und Entsprechendes für $v^{(1)}(x,t)$ und $v^{(2)}(x,t)$ in den §§ 5, 6. Diese Tatsache dient dann im § 7 zum Beweis der Parsevalschen Gleichung für $f(x)$ und folglich zum Nachweis, daß $u(x,t)$, $v^{(1)}(x,t)$ und $v^{(2)}(x,t)$ für $t\to 0$ im Mittel gegen $f(x)$ konvergieren d. h. also die Randbedingung (R_t) erfüllen (vgl. 7, 2). In § 8 werden schließlich die entwickelten Methoden dazu verwandt die Integraldarstellung einer über $\langle 0,\infty\rangle$ im L-Sinne absolut integrierbaren Funktion herzuleiten.

§ 1. Der Eindeutigkeitsbeweis.

1, 1. Wir betrachten zuerst den *parabolischen Fall* und nehmen an, das durch (P), (R_x) und (R_t) gestellte Problem habe neben $u(x,t)$ noch eine zweite Lösung $U(x,t)$, für welche also auch

$$(1,1)\qquad \lim_{t\to 0}\int_0^1[U(x,t)-f(x)]^2\,dx=0$$

gelten würde. Dann folgte wegen (R_t) und (1, 1) aus der Schwarzschen Ungleichung, daß auch

$$(1,2)\qquad \lim_{t\to 0}\int_0^1[u(x,t)-f(x)]\,[U(x,t)-f(x)]\,dx=0.$$

Addiert man zu (1, 2) die Gleichung

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{2}\int_0^1[u(x,t)-f(x)]^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1[U(x,t)-f(x)]^2\,dx\right\}=0,$$

so erhält man

$$\lim_{t\to 0}\int_0^1 [u(x,t)-U(x,t)]^2\,dx = 0\,. \tag{1,3}$$

Die Funktion $w(x,t)=u(x,t)-U(x,t)$ würde also (P) und (R_x) genügen und für $t\to 0$ im Mittel gegen Null konvergieren. Wir zeigen jetzt, daß nur eine für $t>0$ identisch verschwindende Funktion diese drei Forderungen erfüllen kann.

1, 2. Im parabolischen Fall sei [3])

$$J(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 g(x)\,w^2(x,t)\,dx$$

gesetzt. Aus (1, 3) entnimmt man, da $g(x)$ als stetig vorausgesetzt ist, daß

$$\lim_{t\to 0} J(t)=0\,. \tag{1,4}$$

Andererseits erhält man unter Benützung von (P)

$$\frac{dJ}{dt}=\int_0^1 g(x)\,w(x,t)\,\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\,dx=\int_0^1 w(x,t)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\,\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx-\int_0^1 l(x)\,w^2(x,t)\,dx$$

$$=k(x)\,w(x,t)\,\frac{\partial w}{\partial x}\Bigg|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\left(k(x)\,\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\,dx-\int_0^1 l(x)\,w^2(x,t)\,dx\,.$$

Zufolge (R_x) ist

$$k(x)\,w(x,t)\,\frac{\partial w}{\partial x}\Bigg|_{x=0}^{x=1}\leqq 0$$

und also, da auch $l(x)\geqq 0$ vorausgesetzt ist,

$$\frac{dJ}{dt}\leqq 0\,.$$

Für $J(t)$ gilt demnach

$$J(t)\geqq 0,\quad \frac{dJ}{dt}\leqq 0 \text{ und } \lim_{t\to 0} J(t)=0\,,$$

woraus $J(t)\equiv 0$ und $w(x,t)\equiv 0$ für $t>0$ folgt. Der Eindeutigkeitssatz für das parabolische Randwertproblem ist damit bewiesen.

1, 3. Im *elliptischen* Fall gehen wir ähnlich vor. Es seien $V^{(1)}(x,t)$ und $V^{(2)}(x,t)$ hypothetische zweite Lösungen von (E), (R_x), (R_t) und (R_t^∞) bzw. (R_t^1). Die in 1, 1 durchgeführte Überlegung ergibt wieder eine zu (1, 3) analoge Beziehung. Wir setzen (Fall 1)

$$w^{(1)}(x,t)=v^{(1)}(x,t)-V^{(1)}(x,t)$$

sowie

$$J(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 g(x)\,[w^{(1)}(x,t)]^2\,dx\,.$$

Da

$$\lim_{t\to 0} J(t)=0 \quad\text{und}\quad \lim_{t\to\infty} J(t)=0 \tag{1,5}$$

[3]) Vgl. G. Doetsch, Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung II, Math. Zeitschr. **22** (1924).

sein soll und $J(t)$ eine nicht negative Funktion von t ist, gibt es einen beliebig kleinen Wert ε und einen beliebig großen Wert A so, daß

$$(1,6) \qquad \left(\frac{dJ}{dt}\right)_{t=\varepsilon} \geqq 0, \qquad \left(\frac{dJ}{dt}\right)_{t=A} \leqq 0 .$$

Aus (E) folgt aber

$$\int_{\varepsilon}^{A} dt \int_{0}^{1} \left\{ w^{(1)}(x,t)\, \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\, \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x}\right) + g(x)\, \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2}\, w^{(1)} - l(x)\,(w^{(1)})^2 \right\} dx = 0 .$$

Partielle Integration liefert

$$(1,7) \qquad 0 = \int_{\varepsilon}^{A} \left\{ k(x)\, \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x}\, w^{(1)} \right\}_{x=0}^{x=1} dt - \int_{\varepsilon}^{A} dt \int_{0}^{1} \left(k(x)\, \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} \right) \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x}\, dx$$

$$+ \int_{0}^{1} \left\{ g(x)\, \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x}\, w^{(1)} \right\}_{t=\varepsilon}^{t=A} dx - \int_{\varepsilon}^{A} dt \int_{0}^{1} g(x) \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} \right)^2 dx - \int_{\varepsilon}^{A} dt \int_{0}^{1} l(x)\, (w^{(1)})^2\, dx .$$

Das erste Glied in (1, 7) ist, wie aus (R_x) folgt, nicht positiv, ebenso sind auch das zweite, vierte und letzte Glied nicht positiv. Zufolge (1, 6) gilt dasselbe auch für das dritte Glied. (1, 7) fordert also das Verschwinden eines jeden Gliedes und daher das identische Verschwinden von $w^{(1)}(x, t)$ im Gebiet $0 \leqq x \leqq 1$, $\varepsilon \leqq t \leqq A$. Da aber ε beliebig klein und A beliebig groß gemacht werden kann, verschwindet $w^{(1)}(x, t)$ für alle $t > 0$.

Für den elliptischen Fall 2, in dem das Gebiet $0 \leqq x \leqq 1$, $0 < t \leqq 1$ zugrundegelegt wird, erbringt man den Beweis in analoger Weise. An die Stelle von A tritt $1 - \varepsilon_1$, das beliebig dem Wert 1 angenähert werden kann.

§ 2. Die Greensche Funktion.

2, 1. Die Differentialgleichung (0, 2) mit den Randbedingungen (0, 3), zu welcher (0, 1) bei all' unseren Problemen führte, läßt sich ohne wesentliche Änderung der Problemstellung durch eine Transformation [4]) auf die einfachere Form

$$(2,1) \qquad \frac{d^2 y}{dz^2} + \varrho^2 \cdot y(z) = l_1(z)\, y(z)$$

mit den Randbedingungen

$$(2,2) \quad \alpha_1 \cdot y(0) - \alpha \cdot y'(0) = 0, \quad \beta_1 \cdot y(1) + \beta \cdot y'(1) = 0, \quad \alpha_1 \cdot \alpha \geqq 0, \quad \beta_1 \cdot \beta \geqq 0$$

zurückführen. Im folgenden wird für z wieder x und für l_1, das für alle z aus $\langle 0, 1\rangle$ nicht negativ ist, wieder l geschrieben werden. Bezeichnen dann $u(x)$, $v(x)$, $u_1(x)$ und $v_1(x)$ Lösungen von (2, 1), die den Randbedingungen

$$u(0) = 0, \; u'(0) = 1, \; v(0) = 1, \; v'(0) = 0, \; u_1(1) = 0, \; u_1'(1) = -1, \; v_1(1) = 1, \; v_1'(1) = 0$$

genügen, so wird

$$y_1(x) = \alpha_1 \cdot u(x) + \alpha \cdot v(x)$$

der ersten und

$$y_2(x) = \beta_1 \cdot u_1(x) + \beta \cdot v_1(x)$$

der zweiten der Randbedingungen (2, 2) genügen. Es genügt nun jede Lösung von (2, 1) den folgenden beiden Beziehungen:

---

[4]) Vgl. A. Kneser, Die Integralgleichungen usw. 2. Aufl. (Braunschweig 1922), Seite 102 und 110.

$$y(x) = c_1 e^{i\varrho x} + c_2 e^{-i\varrho x} + \frac{e^{i\varrho x}}{2i\varrho}\int_0^x y(\xi)\, l(\xi)\, e^{-i\varrho\xi}\, d\xi - \frac{e^{-i\varrho x}}{2i\varrho}\int_0^x y(\xi)\, l(\xi)\, e^{i\varrho\xi}\, d\xi$$

und

$$y(x) = c_3 e^{i\varrho(1-x)} + c_4 e^{-i\varrho(1-x)} + \frac{e^{-i\varrho x}}{2i\varrho}\int_x^1 y(\xi)\, l(\xi)\, e^{i\varrho\xi}\, d\xi - \frac{e^{i\varrho x}}{2i\varrho}\int_x^1 y(\xi)\, l(\xi)\, e^{-i\varrho\xi}\, d\xi,$$

aus denen man [5]) für große Werte von $|\varrho|$ zwei zugehörige asymptotische Darstellungen der Lösungen von (2, 1) herleitet. Es ist

$$y = c_1 e^{i\varrho x} + c_2 e^{-i\varrho x} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) e^{\mp i\varrho x} \quad [6])\,[7]) \tag{2, 3}$$

und

$$y = c_3 e^{i\varrho(1-x)} + c_4 e^{-i\varrho(1-x)} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) e^{\mp i\varrho(1-x)}. \tag{2, 4}$$

Für die Ableitungen nach x erhält man Darstellungen von der Form

$$y'(x) = i\varrho c_1 e^{i\varrho x} - i\varrho c_2 e^{-i\varrho x} + O(1)\, e^{\mp i\varrho x} \tag{2, 5}$$

$$y''(x) = -\varrho^2\left\{c_1 e^{i\varrho x} + c_2 e^{-i\varrho x} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) e^{\mp i\varrho x}\right\}. \tag{2, 6}$$

Die für $u(x)$, $v(x)$ usw. vorgeschriebenen Randbedingungen lassen sich durch geeignete Wahl der c_1, c_2 usw. erfüllen. Man erhält für $w(x) = \varrho \cdot u(x)$ die Darstellung

$$w(x) = \sin \varrho x + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) e^{\mp i\varrho x}$$

und also

$$u(x) = \frac{\sin \varrho x}{\varrho} + O\left(\frac{1}{\varrho^2}\right) e^{\mp i\varrho x}.$$

Entsprechend erhält man

$$v(x) = \cos \varrho + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) e^{\mp i\varrho x}, \qquad u_1(x) = \frac{\sin \varrho(1-x)}{\varrho} + O\left(\frac{1}{\varrho^2}\right) e^{\mp i\varrho(1-x)},$$

$$v_1(x) = \cos \varrho(1-x) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) e^{\mp i\varrho(1-x)}.$$

2, 2. Die Greensche Funktion des Randwertproblems (2, 1), (2, 2) ist nun

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)\, y_2(\xi)}{y_2'(\xi)\, y_1(\xi) - y_2(\xi)\, y_1'(\xi)}, & x \leqq \xi \leqq 1, \\ \dfrac{y_1(\xi)\, y_2(x)}{y_2'(\xi)\, y_1(\xi) - y_2(\xi)\, y_1'(\xi)}, & 0 \leqq \xi \leqq x. \end{cases} \tag{2, 7}$$

Der Nenner der angeschriebenen Ausdrücke, die Wronskische Determinante des Hauptlösungssystems y_1, y_2, ist nur von ϱ^2 abhängig. Seine Nullstellen, die Eigenwerte $\varrho_\nu^2 (\nu = 1, 2, \ldots)$ des Randwertproblems (2, 1), (2, 2) sind alle einfach, reell und positiv

---

[5]) Kneser a. a. O. [4]), § 29 und § 49.

[6]) Bei Doppelzeichen ist hier, wie stets im folgenden, das obere in Geltung für $\varrho_2 \geqq 0$, das untere für $\varrho_2 < 0$; ϱ_2 bedeutet dabei $I(\varrho)$.

[7]) $O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$, das Landausche Ordnungssymbol, bezeichnet hier eine Funktion in x und ϱ von der Beschaffenheit, daß $\left|\varrho \cdot O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right| < M$ für alle x aus $\langle 0, 1\rangle$ und alle ϱ.

(letzteres infolge der Voraussetzung $l(x) \geqq 0$). Da $y_1(x)$ und $y_2(x)$ in x stetige und in ϱ^2 ganze transzendente Funktionen sind, ist $G(x, \xi; \varrho^2)$ eine in x und ξ stetige und in ϱ^2 meromorphe Funktion, deren Pole alle von 1. Ordnung sind.

2, 3. Wir schätzen nun die Greensche Funktion ab und zwar zunächst für alle Punkte der ϱ-Ebene, die dem Winkelraum

$$\left.\begin{matrix}\delta \\ \pi + \delta\end{matrix}\right\} \leqq \arg \varrho \leqq \begin{cases}\pi - \delta \\ 2\pi - \delta\end{cases} \tag{2, 8}$$

angehören. Dabei ist δ eine beliebige positive Zahl, die kleiner als $\frac{\pi}{4}$ ist. Es ist nun im Winkelraum (2, 8)

$$\varrho \cdot G(x, \xi; \varrho^2) = \begin{cases} \pm \frac{1}{2i}\, e^{\mp i\varrho(\xi - x)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + O(1)\, e^{\pm i\varrho \Delta}, & 0 \leqq x \leqq \xi, \\ \pm \frac{1}{2i}\, e^{\mp i\varrho(x - \xi)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + O(1)\, e^{\pm i\varrho \Delta}, & \xi \leqq x \leqq 1. \end{cases} \tag{2, 9}$$

Dabei ist $\Delta = \operatorname{Min}\{x, 1 - x\}$. Aus (2, 7) ist zu ersehen [5]), daß bei geeignet gewählter Numerierung gilt:

$$\varrho_\nu = \nu\pi + \varepsilon_\nu, \qquad \varrho_{-\nu} = -\nu\pi - \varepsilon_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

wo $\varepsilon_\nu = O\left(\frac{1}{\nu}\right)$.

2, 4. Im komplementären Winkelraum

$$\left.\begin{matrix}2\pi - \delta \\ \pi - \delta\end{matrix}\right\} < \arg \varrho < \begin{cases}\delta \\ \pi + \delta\end{cases} \tag{2, 10}$$

geben wir eine Darstellung der Greenschen Funktion nur längs der Wege C_k und D_k in der ϱ-Ebene. Dabei besteht der Weg C_k (vgl. Fig. 1) aus den Seiten zweier Dreiecke, deren erstes in der Halbebene $\varrho_1 \geqq 0$ gelegen ist und die Eckpunkte $0, R_k - iR_k, R_k + iR_k$ besitzt, deren zweites in der Halbebene $\varrho_1 \leqq 0$ liegt und die Ecken $0, -R_k + iR_k, -R_k - iR_k$

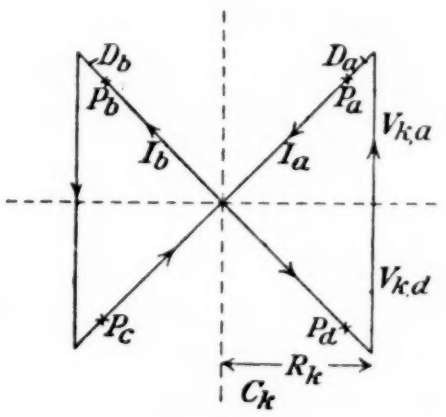

Fig. 1.

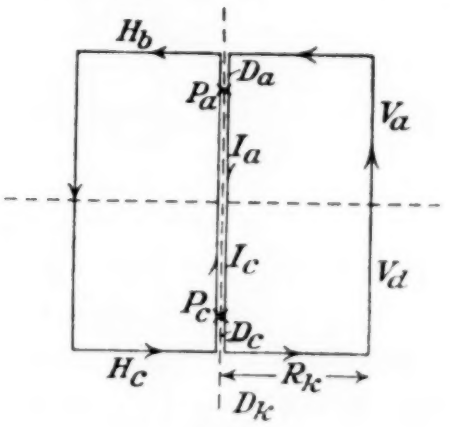

Fig. 2.

hat. Der Weg D_k (vgl. Fig. 2) besteht aus den Seiten zweier Rechtecke mit den Eckpunkten iR_k, $-iR_k$, $R_k - iR_k$, $R_k + iR_k$ und iR_k, $-R_k + iR_k$, $-R_k - iR_k$, $-iR_k$. Dabei sind die Ecken in der Reihenfolge aufgezählt, die der Durchlaufung der Wege entspricht. Für die Zahlen R_k treffen wir folgende Festsetzung:

$$R_k = \frac{2k + 1}{2}\pi \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Auf den in (2, 10) liegenden Teilen von C_k und D_k ist dann

$$\arg\left(e^{\pm 2i\varrho}\right) = \pm (2k + 1)\pi,$$

und da für die von ϱ angenommenen Werte

$$|e^{\pm 2i\varrho}| \leqq 1,$$

gilt für die Wronskische Determinante

$$W(\varrho^2) = \pm\, \varrho c e^{\mp i\varrho}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right). \tag{2, 11}$$

c erfüllt dabei die Ungleichungen $1 < c \leqq 2$.

Wenn in (2, 2) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ oder $\alpha \neq \beta$, $\beta = 0$ ist, wird eine andere Festsetzung notwendig. Für die Eigenwerte gilt nämlich jetzt

$$\varrho_\nu = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi + O\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Die Zahlenfolge der R_k ist dann durch $R_k = k\pi$ zu definieren, wodurch auf den in (2, 10) gelegenen Teilen der Integrationswege wieder die Darstellung (2, 11) für die Wronskische Determinante möglich wird. Nach diesen Festsetzungen gilt also in allen Fällen in (2, 10) auf den Wegen C_k und D_k

$$\varrho \cdot G(x, \xi; \varrho^2) = O(1). \tag{2, 12}$$

§ 3. Die Funktionen $u(x, t)$, $v^{(1)}(x, t)$ und $v^{(2)}(x, t)$ im Innern der betrachteten Bereiche.

3, 0. Es soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, daß die durch (0, 5), (0, 6) und (0, 7) definierten Funktionen in x und t zweimal stetig differenzierbar sind und die Gleichungen (P) bzw. (E) sowie die Randbedingungen (R_x) für alle $t > 0$ erfüllen.

3, 1. Grundlegend für das Weitere ist der folgende Hilfssatz: *Es sei $\Phi(x, \xi; \varrho^2)$ eine in (x, ξ) stetige und in ϱ^2 meromorphe Funktion, deren Pole der Lage nach mit denen von $G(x, \xi; \varrho^2)$ übereinstimmen. Außerdem soll die Funktion $\varrho \cdot \Phi(x, \xi; \varrho^2)$ in (2, 8) und auf den in (2, 10) gelegenen Teilen von C_k und D_k durch $\varrho^\nu \cdot O(1)$ darstellbar sein, unter ν eine beliebige ganze, positive Zahl verstanden. Dann ist die Konvergenz in den Ausdrücken*

$$U(x, t) = \lim_{k\to\infty} \int_{C_k} \varrho\, e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^1 \Phi(x, \xi; \varrho^2)\, f(\xi)\, d\xi$$

$$V^{(1)}(x, t) = \lim_{k\to\infty} \left\{ \int_{D_k^{(1)}} \varrho\, e^{-\varrho t}\, d\varrho \int_0^1 \Phi\, f(\xi)\, d\xi + \int_{D_k^{(2)}} \varrho\, e^{\varrho t}\, d\varrho \int_0^1 \Phi\, f\, d\xi \right\}$$

$$V^{(2)}(x, t) = \lim_{k\to\infty} \int_{C_k} \varrho\, \frac{\mathfrak{Sin}\, \varrho(1-t)}{\mathfrak{Sin}\, \varrho}\, d\varrho \int_0^1 \Phi\, f\, d\xi$$

gleichmäßig in x und t für alle x aus $\langle 0, 1\rangle$ und alle $t \geqq t_0 > 0$.

Um den Beweis für $U(x, t)$ zu erbringen, zeigen wir, daß für hinreichend große k und beliebige p

$$\left| \int_{C_{k+p}} \varrho\, e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^1 \Phi\, f\, d\xi - \int_{C_k} \varrho\, e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^1 \Phi\, f\, d\xi \right| = \left| \int_{\Gamma_{k,p}} \varrho\, e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^1 \Phi\, f\, d\xi \right|$$

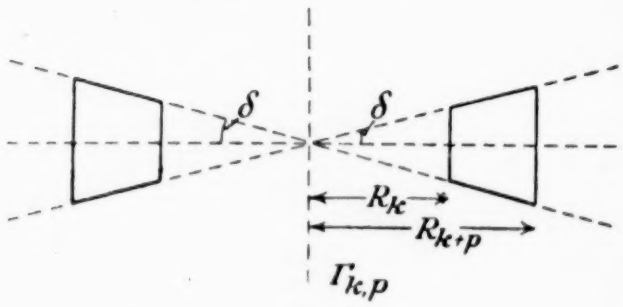

Fig. 3.

beliebig klein gemacht werden kann und zwar unabhängig von dem besonderen Wert der Variabeln x und t, wenn sie nur den zulässigen Wertbereichen angehören. $\Gamma_{k,p}$ (vgl. Fig. 3) bezeichnet dabei einen aus den beiden trapezförmigen Wegen $\Gamma_{k,p}^{(1)}$ und $\Gamma_{k,p}^{(2)}$ bestehenden Integrationsweg. Die Ecken von $\Gamma_{k,p}^{(1)}$ sind in der Reihenfolge des Durch-

laufungssinnes: $R_{k+p}(1+i\operatorname{tg}\delta)$, $R_k(1+i\operatorname{tg}\delta)$, $R_k(1-i\operatorname{tg}\delta)$, $R_{k+p}(1-i\operatorname{tg}\delta)$; die Ecken von $\Gamma_{k,p}^{(2)}$ sind: $R_k(-1+i\operatorname{tg}\delta)$, $R_{k+p}(-1+i\operatorname{tg}\delta)$, $R_{k+p}(-1-i\operatorname{tg}\delta)$, $R_k(-1-i\operatorname{tg}\delta)$.

Wir wählen zwei Zahlen M und F so, daß

$$M > \left| \varrho \cdot \Phi(x, \xi; \varrho^2) \cdot \frac{1}{\varrho^\nu} \right| \quad \text{und} \quad F = \int_0^1 |f(\xi)|\, d\xi .$$

Dann ist

$$\left| \int_{\Gamma_{k,p}} \varrho\, e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^1 \Phi\, f\, d\xi \right| < \frac{4\,M\,F\operatorname{tg}\delta}{\cos^\nu \delta} \left(R_k^{\nu+1}\, e^{-R_k^2 t_0(1-\operatorname{tg}^2\delta)} + R_{k+p}^{\nu+1}\, e^{-R_{k+p}^2 t_0(1-\operatorname{tg}^2\delta)}\right)$$
$$+ \frac{4\,M\,F}{\cos^{\nu+1}\delta} \int_{R_k}^{R_{k+p}} r^\nu\, e^{-r^2(1-\operatorname{tg}^2\delta)t_0}\, dr .$$

In gleicher Weise findet man

$$\left| \int_{\Gamma_{k,p}^{(1)}} \varrho\, e^{-\varrho t}\, d\varrho \int_0^1 \Phi\, f\, d\xi \right| < \frac{2\,M\,F\operatorname{tg}\delta}{\cos^\nu \delta} \left(R_k^{\nu+1}\, e^{-R_k t_0} + R_{k+p}^{\nu+1}\, e^{-R_{k+p} t_0}\right) + \frac{2\,M\,F}{\cos^{\nu+1}\delta} \int_{R_k}^{R_{k+p}} r^\nu\, e^{-r t_0}\, dr$$

und eine entsprechende Abschätzung für

$$\int_{\Gamma_{k,p}^{(1)}} \varrho\, e^{\varrho t}\, d\varrho \int_0^1 \Phi\, f\, d\xi \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma_{k,p}} \varrho\, \frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}\, d\varrho \int_0^1 \Phi\, f\, d\xi ,$$

letzteres, weil auf $\Gamma_{k,p}$

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho} = e^{\mp \varrho t}\, O(1),$$

wobei für die rechte Halbebene das negative und für die linke das positive Vorzeichen gilt.

Die gewonnenen Abschätzungen lassen erkennen, daß die Integrale über $\Gamma_{k,p}$ für $k \to \infty$ gleichmäßig in x und t gegen Null gehen, w. z. b. w.

3, 2. *Der bewiesene Hilfssatz ergibt als erste Folgerung, daß*

$$u(x,t) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \varrho\, e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^1 G\, f\, d\xi$$

usw. [vgl. (0, 5), (0, 6), (0, 7)] *als gleichmäßige Limites von Folgen in* (x, t) *stetiger Funktionen* $u_k(x,t), \ldots v_k^{(1)}(x,t), \ldots\ v_k^{(2)}(x,t), \ldots$ *selbst stetige Funktionen in* (x, t) *sind.* Dabei ist

$$u_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \varrho\, e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^1 G\, f\, d\xi$$

$$v_k^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{D_k^{(1)}} \varrho e^{-\varrho t}\, d\varrho \int_0^1 G\, f\, d\xi + \int_{D_k^{(2)}} \varrho e^{\varrho t}\, d\varrho \int_0^1 G\, f\, d\xi \right\}$$

und

$$v_k^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \varrho\, \frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}\, d\varrho \int_0^1 G\, f\, d\xi .$$

Da die unter den Integralen auftretenden Funktionen in (x, t) stetig sind, ebenso wie ihre Ableitungen nach x und t, dürfen die ersten und zweiten Ableitungen von u_k, $v_k^{(1)}$

und $v_k^{(2)}$ durch Differentiation unter dem Integralzeichen gebildet werden. Die dabei auftretenden Funktionen $\varrho \frac{\partial G_k}{\partial x}$, $\varrho \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$, $\varrho^2 G$, $\varrho^3 G$ sind sämtlich Funktionen Φ von der im Hilfssatz bezeichneten Art (vgl. dazu (2, 5), (2, 6), (2, 7)). Die Funktionenfolgen

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}, \ldots \qquad \frac{\partial u_k}{\partial x}, \ldots$$

konvergieren also gleichmäßig in x und t, so daß

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lim_{k\to\infty} u_k(x,t)) = \lim_{k\to\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t} \text{ und } \frac{\partial}{\partial x}(\lim_{k\to\infty} u_k(x,t)) = \lim_{k\to\infty} \frac{\partial u_k}{\partial x},$$

und entsprechend für die Folgen $v_k^{(1)}, \ldots$ und $v_k^{(2)}, \ldots$ Die Wiederholung unseres Schlusses ergibt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\lim_{k\to\infty} u_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \text{ usw.},$$

so daß sich also die zweimalige stetige Differenzierbarkeit der Funktionen $u(x,t)$, $v^{(1)}(x,t)$ *und* $v^{(2)}(x,t)$ *nach* x *und* t *im Bereich* $0 \leqq x \leqq 1$, $t \geqq t_0 > 0$ *ergibt.* Zufolge der bekannten Eigenschaften der Greenschen Funktion werden also im angegebenen Bereich (P) bzw. (E) und (R_x) erfüllt.

§ 4. Bestimmung von $\lim_{t\to 0} u(x,t)$.

4, 0. Zur Berechnung von $\lim_{t\to 0} u(x,t)$ erweist es sich als vorteilhaft den Ausdruck

$$\int_{C_k} \varrho e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^1 G f\, d\xi + \int_{E_k} \varrho e^{\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^1 G f\, d\xi$$

an Stelle des gleichwertigen $\int_{C_k} \varrho e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^1 G f\, d\xi$ zu setzen. Der Weg E_k (vgl. Fig. 4) entsteht aus C_k durch eine Drehung von 90° um den Nullpunkt der ϱ-Ebene. Für die Bezeichnung der Teilwege, in die wir C_k und E_k zerlegen, treffen wir folgende Vereinbarungen:

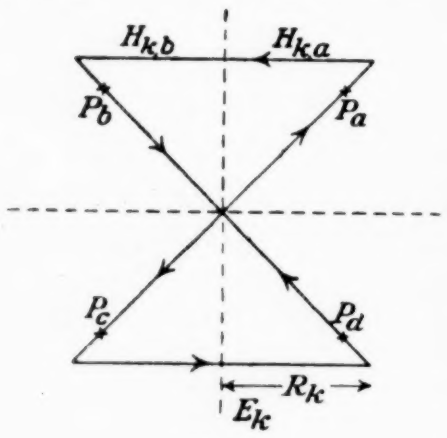

Fig. 4.

Die Indizes a bzw. b, c, d sollen bedeuten, daß die damit versehenen Punkte, Strecken oder Teilwege im ersten bzw. zweiten, dritten, vierten Quadranten liegen. Mit P_a, P_b, P_c und P_d seien vier Punkte bezeichnet, die wir in folgender Weise definieren; es sei $P_a = R + iR$, $P_b = -R + iR$, $P_c = -R - iR$, $P_d = R - iR$; R bezeichnet dabei eine beliebige positive Zahl, die nur die Bedingung $R < R_k$ zu erfüllen hat. I_a, $I_b, \ldots$ seien die durch den 0-Punkt und $P_a, P_b, \ldots$ begrenzten Strecken. Die Strecken zwischen $P_a, P_b, \ldots$ und $R_k + iR_k$, $-R_k + iR_k, \ldots$ seien durch $D_{a,k}$, $D_{b,k}, \ldots$ symbolisiert. $H_{k,a}$, $H_{k,b}, \ldots$ und $V_{k,a}$, $V_{k,b}, \ldots$ stehen für die in den durch den Index bezeichneten Quadranten gelegenen Teile der horizontalen bzw. vertikalen Integrationswege.

4, 1. Auf den Wegen $V_{k,a}$, $V_{k,b}$ ist es nach (2, 9) und (2, 12) möglich, ϱG durch $O(1)$ darzustellen. Dann ist aber

$$\left| \int_{V_{k,a}} \varrho\, e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^1 G f\, d\xi \right| < \frac{MF}{R_k t}(1 - e^{-R_k^2 t}). \tag{4, 1}$$

M bezeichnet dabei eine obere Schranke für $|\varrho G|$; F ist wieder für $\int_0^1 |f(\xi)|\, d\xi$ gesetzt. Man erkennt aus (4, 1), daß

$$\lim_{k\to\infty} \int_{V_{k,a}} \varrho e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^1 G f\, d\xi = 0. \tag{4, 2}$$

Dasselbe gilt für $V_{k,b}$, $V_{k,c}$ und $V_{k,d}$. In gleicher Weise erhält man

$$\lim_{k\to\infty} \int_{H_{k,a}} \varrho e^{\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^1 G f\, d\xi = 0,$$

und entsprechend für $H_{k,b}$, $H_{k,c}$ und $H_{k,d}$.

4, 2. Etwas schwierigere Überlegungen erfordern die Integrale über die Strecken $D_{k,a}$, $D_{k,b}$, ... Wir betrachten zuerst das Integral

$$\int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^x \left(\varrho G - \frac{1}{2i} e^{i\varrho(x-\xi)}\right) f(\xi)\, d\xi .$$

Für $\varrho G - \frac{1}{2i} e^{i\varrho(x-\xi)}$ darf nach (2, 9) $O\left(\frac{1}{\varrho}\right) e^{i\varrho(x-\xi)} + O(1)\, e^{i\varrho\Delta}$ gesetzt werden ($x \neq 0$ und $\neq 1$ vorausgesetzt). Wir untersuchen zunächst den ersten Teil und bezeichnen die Funktion, die durch das Symbol $O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ nach ihrem asymptotischen Verhalten dargestellt ist, mit $\Omega_1(x, \xi; \varrho)$ für $\xi \leqq x$ und mit $\Omega_2(x, \xi; \varrho)$ für $x \leqq \xi$. Dann erhält man

$$\left| \int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^{x-\Delta x} \Omega_1(x, \xi; \varrho)\, e^{i\varrho(x-\xi)} f(\xi)\, d\xi \right| < MF\, \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}|\mathsf{P}_a|\,\Delta x}}{|\mathsf{P}_a|\,\Delta x\, \frac{\sqrt{2}}{2}} .$$

Dabei steht M für eine obere Schranke von $|\varrho\Omega_1|$ und Δx für eine positive Zahl, die kleiner x ist. Man ersieht, daß

$$\lim_{k\to\infty} \int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^{x-\Delta x} \Omega_1\, e^{i\varrho(x-\xi)} f(\xi)\, d\xi$$

existiert und durch Wahl hinreichend großer $|\mathsf{P}|$ beliebig klein gemacht werden kann. *Wir führen, um diesen Sachverhalt kurz kennzeichen zu können, ein allgemeines Funktionssymbol $\eta(\mathsf{P})$ ein, das ausdrücken soll, daß der ihm gleichgesetzte Ausdruck absolut genommen durch Wahl von hinreichend großen $|\mathsf{P}|$ beliebig klein gemacht werden kann.* Es ist also

$$\lim_{k\to\infty} \int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^{x-\Delta x} \Omega_1\, e^{i\varrho(x-\xi)} f\, d\xi = \eta(\mathsf{P}) . \tag{4, 3}$$

Man findet ebenso:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_{x+\Delta' x}^1 \Omega_2\, e^{i\varrho(\xi-x)} f\, d\xi = \eta(\mathsf{P}) , \tag{4, 4}$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{D_{k,a}} e^{\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^{x-\Delta x} \Omega_1\, e^{i\varrho(x-\xi)} f\, d\xi = \eta(\mathsf{P}) , \tag{4, 5}$$

$$(4,6)\qquad \lim_{k\to\infty}\int_{D_{k,a}} e^{\varrho^2 t}\,d\varrho \int_{x+\Delta' x}^{1} \Omega_2\, e^{i\varrho(\xi-x)}\, f\,d\xi = \eta(\mathsf{P}),$$

sowie die entsprechenden Ausdrücke für die übrigen Quadranten.

4, 3. Um das gleiche Resultat auch für die analog gebildeten Integrale über $\langle x-\Delta x, x\rangle$ und $\langle x, x+\Delta' x\rangle$ nachzuweisen, in denen die konvergenzerzeugenden Glieder in unmittelbarer Nähe von x den Wert 1 annehmen, ersetzen wir die Funktion $f(\xi)$ durch eine Derivierte ihres unbestimmten Integrals. Partielle Integration ergibt dann

$$(4,7)\qquad \int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\,d\varrho \int_{x-\Delta x}^{x} \Omega_1\, e^{i\varrho(x-\xi)}\, f\,d\xi = -\int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\,[\Omega_1\, e^{i\varrho(x-\xi)} \int_{\xi}^{x} f(\eta)\,d\eta]_{\xi=x-\Delta x}^{\xi=x}$$

$$+\int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\,d\varrho \int_{x-\Delta x}^{x} \frac{d}{d\xi}\,(\Omega_1\, e^{i\varrho(x-\xi)}) \left(\int_{\xi}^{x} f\,d\eta\right) d\xi\,.$$

Die oben in 2, 3 und 2, 4 mitgeteilten Abschätzungen lassen erkennen, daß

$$(4,8)\qquad \frac{d}{d\xi}\,(\Omega_1\, e^{i\varrho(x-\xi)}) = O(1)\, e^{i\varrho(x-\xi)}$$

gesetzt werden darf. Dann ist, wenn wir die in (4, 8) durch $O(1)$ dargestellte Funktion mit $\overline{\Omega}_1$ bezeichnen, das zweite Glied auf der rechten Seite von (4, 7) gleich

$$\int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\,d\varrho \int_{x-\Delta x}^{x} (x-\xi)\left(\frac{1}{x-\xi}\int_{\xi}^{x} f(\eta)\,d\eta\right) \overline{\Omega}_1\, e^{i\varrho(x-\xi)}\,d\xi\,.$$

Wir setzen nun voraus, daß für den speziellen Wert von x, den wir betrachten,

$$D_x^- f = \lim_{\xi\to x} \frac{1}{x-\xi}\int_{\xi}^{x} f(\eta)\,d\eta$$

existiere. Das ist für alle x aus $\langle 0, 1\rangle$ mit Ausnahme höchstens einer Nullmenge der Fall [8]). Es läßt sich dann Δx so wählen, daß

$$\left|\frac{1}{x-\xi}\int_{\xi}^{x} f(\eta)\,d\eta\right| < |D_x^- f| + \varepsilon$$

für alle x aus $\langle x-\Delta x, x\rangle$. Dann ist

$$(4,9)\qquad \left|\int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\,d\varrho \int_{x-\Delta x}^{x} \overline{\Omega}_1\, e^{i\varrho(x-\xi)}\left(\int_{\xi}^{x} f\,d\eta\right) d\xi\right| < M\,(|D_x^- f| + \varepsilon)\sqrt{2}\left(\frac{e^{-\frac{|\mathsf{P}|\,\delta}{\sqrt{2}}}}{\frac{|\mathsf{P}|}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\frac{|\mathsf{P}|}{\sqrt{2}}}\right)$$

für hinreichend große $|\mathsf{P}|$. M bezeichnet eine obere Schranke für $|\overline{\Omega}_1|$. Das erste Glied auf der rechten Seite von (4, 7) wird gleich

$$\int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\,\Omega_1(x, x-\Delta x;\ \varrho^2)\, e^{i\varrho\,\Delta x}\left(\int_{x-\Delta x}^{x} f\,d\eta\right) d\varrho\,.$$

Die Rechnungen, die oben zu (4, 3) führten, lassen erkennen, daß dieser Ausdruck bei hinreichend großen $|\mathsf{P}|$ für alle $R_k > |\mathsf{P}|\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ absolut genommen beliebig klein

[8]) Vgl. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, 1. Aufl. (Leipzig 1918), Seite 496.

wird. Dasselbe ergibt sich aus (4, 9) für das zweite Glied. Es ist demnach

$$\lim_{k\to\infty}\int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\,d\varrho\int_{x-\Delta x}^{x}\Omega_1 e^{i\varrho(x-\xi)}f(\xi)\,d\xi = \eta(\mathsf{P}) \tag{4,10}$$

und zusammen mit (4, 3)

$$\lim_{k\to\infty}\int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\,d\varrho\int_{0}^{x}\Omega_1\, e^{i\varrho(x-\xi)}f(\xi)\,d\xi = \eta(\mathsf{P})\,. \tag{4,11}$$

Analoge Rechnungen ergeben, wenn die Existenz von $\lim\limits_{\xi\to x}\dfrac{1}{\xi-x}\int\limits_{x}^{\xi} f(\eta)d\eta = D_x^+ f$ vorausgesetzt wird,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\,d\varrho\int_{x}^{1}\Omega_2\, e^{i\varrho(\xi-x)}f\,d\xi = \eta(\mathsf{P})\,, \tag{4,12}$$

sowie das Entsprechende für die mit dem Glied $e^{+\varrho^2 t}$ gebildeten analogen Ausdrücke und für die Integrale über $D_{k,b}$, $D_{k,c}$ und $D_{k,d}$. Die nämlichen Abschätzungen [wie in (4, 11) und (4, 12)] lassen sich durchführen für die Glieder, die in (2, 9) durch $O(1)\,e^{\pm i\varrho\Delta}$ dargestellt sind.

4, 4. Wir wenden uns zu den Integralen

$$\int_{I_a}\varrho e^{-\varrho^2 t}d\varrho\int_{0}^{1}G\,f\,d\xi - \int_{I_a}\varrho\, e^{\varrho^2 t}\,d\varrho\int_{0}^{1}G\,f\,d\xi \quad \text{usw.} \tag{4,13}$$

Es läßt sich für alle x und ξ aus $\langle 0, 1\rangle$ und alle in Frage kommenden Werte von ϱ eine Schranke M so angeben, daß auf I_a stets

$$|\varrho\cdot G(x,\xi;\varrho^2)| < M\,,$$

gleichgültig welchen Wert $|\mathsf{P}|$ hat. Dann ist für $t < \dfrac{\pi}{2\cdot|\mathsf{P}|^2}$

$$\left|\int_{I_a}\varrho e^{-\varrho^2 t}d\varrho\int_{0}^{1}G\,f\,d\xi - \int_{I_a}\varrho\, e^{\varrho^2 t}\,d\varrho\int_{0}^{1}G\,f\,d\xi\right| < 2\,M\,F\sin\left(|\mathsf{P}|^2 t\right). \tag{4,14}$$

Für $t\to 0$ wird (4, 13) demnach verschwinden.

4, 5. Bestimmend für den schließlichen Wert von $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)$ sind die Integrale

$$\frac{1}{2i}\int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}d\varrho\int_{0}^{x} e^{i\varrho(x-\xi)}f(\xi)\,d\xi, \qquad \frac{1}{2i}\int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}d\varrho\int_{x}^{1} e^{i\varrho(\xi-x)}f(\xi)\,d\xi \quad \text{usw.}$$

Wir dürfen, wie die durchgeführten Abschätzungen lehren,

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2i}\left\{\int_{D_{k,a}}(e^{-\varrho^2 t}-e^{\varrho^2 t})\,d\varrho\int_{0}^{x} e^{i\varrho(x-\xi)}\,f\,d\xi + \int_{D_{k,b}} + \int_{D_{k,c}} + \int_{D_{k,d}}\right\}\\ &= \lim_{t\to\infty}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2i}\left\{\int_{C_k}\pm e^{-\varrho^2 t}\,d\varrho\int_{0}^{x} e^{\pm i\varrho(x-\xi)}f\,d\xi + \int_{E_k}\pm e^{\varrho^2 t}\,d\varrho\int_{0}^{x} e^{\pm i\varrho(x-\xi)}f\,d\xi\right\}\end{aligned} \tag{4,15}$$

setzen. Das Integral über E_k auf der rechten Seite ist nach dem Cauchyschen Satz gleich Null. Nach dem gleichen Satz läßt auch das Integral über C_k eine Umformung zu, nach der die rechte Seite von (4, 15) gleich

$$\lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty} 2i\int_0^{R_k} e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1\int_0^x \cos\varrho_1(x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi \tag{4, 16}$$

wird. Die gleichen Überlegungen ergeben

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2i}\left\{\int_{D_{k,a}}(e^{-\varrho^2 t}-e^{\varrho^2 t})\,d\varrho\int_x^1 e^{i\varrho(\xi-x)}f\,d\xi+\int_{D_{k,b}}+\int_{D_{k,c}}+\int_{D_{k,d}}\right\}\\ &=\lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty} 2i\int_0^{R_k} e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1\int_x^1\cos\varrho_1(\xi-x)\,f(\xi)\,d\xi.\end{aligned} \tag{4, 17}$$

Die Integrationsfolge in den erhaltenen Ausdrücken darf vertauscht werden [9]), so daß

$$\lim_{k\to\infty} 2i\int_0^{R_k} e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1\int_0^x\cos\varrho_1(x-\xi)f(\xi)\,d\xi=\lim_{k\to\infty} 2i\int_0^x f(\xi)\,d\xi\int_0^{R_k}\cos\varrho_1(x-\xi)e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1, \tag{4, 18}$$

und entsprechend für das Intervall $\langle x, 1\rangle$. Da $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_0^{R_k}\cos\varrho_1(x-\xi)\,e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1$ in ξ gleichmäßig konvergiert und folglich sich für alle ξ und k eine feste Schranke für $\left|\int\limits_0^{R_k}\cos\varrho_1(x-\xi)\,e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1\right|$ angeben läßt, ist nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz in (4, 18) der Grenzübergang unter dem Integralzeichen erlaubt, so daß kommt:

$$\lim_{k\to\infty} 2i\int_0^{R_k} e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1\int_0^x\cos\varrho_1(x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi=2i\int_0^x f(\xi)\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi \tag{4, 19}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} 2i\int_0^{R_k} e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1\int_x^1\cos\varrho_1(\xi-x)\,f(\xi)\,d\xi=2i\int_x^1 f(\xi)\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi. \tag{4, 20}$$

Zunächst ist nun

$$\lim_{t\to 0}\int_0^{x-\Delta x} f(\xi)\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi=0\quad\text{und}\quad\lim_{t\to 0}\int_{x+\Delta' x}^1 f(\xi)\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\,d\xi=0.$$

Für die noch verbleibenden Integrale über $\langle x-\Delta x, x\rangle$ und $\langle x, x+\Delta' x\rangle$ liefert partielle Integration

$$\begin{aligned}2i\int_{x-\Delta x}^x\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}f(\xi)\,d\xi&=i\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(\Delta x)^2}{4t}}\int_{x-\Delta x}^x f(\xi)\,d\xi+2i\int_{x-\Delta x}^x\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,\frac{(x-\xi)^2}{4t}\\ &\quad\cdot\left(\frac{1}{x-\xi}\int_\xi^x f(\eta)\,d\eta\right)d\xi,\end{aligned} \tag{4, 21}$$

und entsprechend für das Integral über $\langle x, x+\Delta' x\rangle$.

Das erste Glied auf der rechten Seite von (4, 21) konvergiert gegen Null mit $t\to 0$. Für das zweite erhält man durch geeignete Erweiterung und Zerlegung

$$2i\,D_x^- f\int_{x-\Delta x}^x\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,\frac{(x-\xi)^2}{4t}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi+2i\int_{x-\Delta x}^x\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,\frac{(x-\xi)^2}{4t}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\left(\frac{1}{x-\xi}\int_\xi^x f(\eta)\,d\eta-D_x^- f\right)d\xi.$$

---

[9]) Carathéodory, a. a. O. [8]) § 556 Satz 9.

Analog für das Integral über $\langle x, x + \Delta' x\rangle$. Nun ist

$$\lim_{t\to 0} 2i \int_{x-\Delta x}^{x} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, \frac{(x-\xi)^2}{4t}\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\, d\xi = i\pi \tag{4, 22}$$

und

$$\lim_{t\to 0} 2i \int_{x}^{x+\Delta' x} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, \frac{(\xi-x)^2}{4t}\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\, d\xi = i\pi. \tag{4, 23}$$

Wie die Substitution $y = \dfrac{x-\xi}{2\sqrt{t}}$ erkennen läßt, ist $\displaystyle\int_{x-\Delta x}^{x} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, \frac{(x-\xi)^2}{4t}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi$ in t eine positive, monoton fallende Funktion, so daß für hinreichend kleine Δx und alle $t > 0$ zufolge (4, 22)

$$\left| 2i \int_{x-\Delta x}^{x} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, \frac{(x-\xi)^2}{4t}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \left(\frac{1}{x-\xi} \int_{\xi}^{x} f(\eta)\, d\eta - D_x^- f \right) d\xi \right| < \varepsilon\pi. \tag{4, 24}$$

Wird jetzt eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so kann zunächst Δx so bestimmt werden, daß für alle $t > 0$

$$\left| 2i \int_{x-\Delta x}^{x} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, \frac{(x-\xi)^2}{4t}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \left(\frac{1}{x-\xi} \int_{\xi}^{x} f(\eta)\, d\eta - D_x^- f \right) d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

ferner t_1 so, daß für alle positiven $t < t_1$

$$\left| 2i\, D_x^- f \int_{x-\Delta x}^{x} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, \frac{(x-\xi)^2}{4t}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi - i\pi\, D_x^- f \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

ferner t_2 so, daß für alle positiven $t < t_2$

$$\left| 2i \int_{0}^{x-\Delta x} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, f(\xi)\, d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

und t_3 so, daß für alle positiven $t < t_3$

$$\left| i \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(\Delta x)^2}{4t}} \int_{0}^{x} f(\xi)\, d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{4};$$

dann ist für alle positiven $t < \text{Min}\,\{t_1, t_2, t_3\}$

$$\left| 2i \int_{0}^{x} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, f(\xi)\, d\xi - i\pi\, D_x f \right| < \varepsilon.$$

Somit ist erwiesen, daß

$$\lim_{t\to 0} 2i \int_{0}^{x} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, f(\xi)\, d\xi = i\pi\, D_x^- f, \tag{4, 25}$$

sofern $D_x^- f$ für den betrachteten Wert von x existiert. Analoge Überlegungen liefern

$$\lim_{t\to 0} 2i \int_{x}^{1} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, f(\xi)\, d\xi = i\pi\, D_x^+ f. \tag{4, 26}$$

Die in 4, 1—4, 5 durchgeführten Abschätzungen ergeben

$$\lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}\left\{\int_{C_k}\varrho e^{-\varrho^2 t}\,d\varrho\int_0^1 G f\,d\xi+\int_{E_k}\varrho e^{\varrho^2 t}\,d\varrho\int_0^1 G f\,d\xi\right\}=i\pi\,(D_x^- f+D_x^+ f),$$

und also, da das Integral über E_k stets identisch Null ist,

$$\lim_{t\to 0} u(x,t)=\frac{1}{2}\,(D_x^- f+D_x^+ f)$$

für alle x aus $\langle 0,1\rangle$ mit Ausnahme höchstens einer Nullmenge [8]). *Wir schreiben dafür, indem wir uns des Zeichens* $\sim$ *bedienen, um die Übereinstimmung zweier Ausdrücke für einen maßgleichen Kern des zugrundegelegten Definitionsbereiches auszudrücken,*

$$\lim_{t\to 0} u(x,t)\sim f(x). \tag{4, 27}$$

Für die Randpunkte $x=0$ und $x=1$ ergibt sich, unter Voraussetzung der Existenz der Derivierten,

$$\lim_{t\to 0} u(0,t)=D_0^+ f \quad \text{und} \quad \lim_{t\to 0} u(1,t)=D_1^- f;$$

wenn aber $\alpha=0,\ \beta\neq 0$,

$$\lim_{t\to 0} u(0,t)=0\,,$$

und analog für $\alpha\neq 0,\ \beta=0$

$$\lim_{t\to 0} u(1,t)=0\,.$$

Für $\alpha=0,\ \beta=0$ erhält man in beiden Randpunkten den Wert Null.

§ 5. Bestimmung von $\lim_{t\to 0} v^{(1)}(x,t)$.

5, 0. Der Integrationsweg D_k zerfällt in zwei Teile $D_k^{(1)}$ und $D_k^{(2)}$. Mit I_a und I_c seien die vom Ursprung und den Punkten P_a bzw. P_c begrenzten Strecken bezeichnet, mit $D_{k,a}$ und $D_{k,c}$ die zwischen P_a und iR_k bzw. P_c und $-iR_k$ liegenden Strecken. Dabei ist $\mathsf{P}_a=iR$, $\mathsf{P}_c=-iR$; R positiv und $<R_k$. $V_a,\ldots$ und $H_a,\ldots$ stehen für die im ersten, ... Quadranten liegenden Teile der vertikalen bzw. horizontalen Quadratseiten.

5, 1. Auf den Wegen $V_a, V_b,\ldots$ ist ϱG und auch $\varrho G\mp\frac{1}{2i}\,e^{\pm i\varrho(\xi-x)}$ für $\xi\geqq x$ und $\varrho\,G\mp\frac{1}{2i}\,e^{\pm i\varrho(x-\xi)}$ für $\xi\leqq x$ durch $O(1)$ darstellbar. Man erkennt dann, daß

$$\lim_{k\to\infty}\int_{V_{k,a}} e^{-\varrho t}\,d\varrho\int_x^1\left(\varrho\,G-\frac{1}{2i}\,e^{i\varrho(\xi-x)}\right)f(\xi)\,d\xi=0 \tag{5, 1}$$

und

$$\lim_{k\to\infty}\int_{V_{k,a}} e^{-\varrho t}\,d\varrho\int_0^x\left(\varrho\,G-\frac{1}{2i}\,e^{i\varrho(x-\xi)}\right)f(\xi)\,d\xi=0 \tag{5, 2}$$

und entsprechend für $V_b,\ldots$ Auf den Wegen $H_a,\ldots$ darf, $x\neq 0$ und $x\neq 1$ vorausgesetzt,

$$\varrho G\mp\frac{1}{2i}\,e^{\pm i\varrho(\xi-x)}=O\left(\frac{1}{\varrho}\right),\qquad x\leqq\xi,$$

$$\varrho G\mp\frac{1}{2i}\,e^{\pm i\varrho(x-\xi)}=O\left(\frac{1}{\varrho}\right),\qquad \xi\leqq x$$

gesetzt werden. Dann ist

$$\left| \int\limits_{H_{k,a}} e^{-\varrho t}\, d\varrho \int\limits_0^x \left(\varrho\, G - \frac{1}{2i}\, e^{i\varrho(x-\xi)} \right) f\, d\xi \right| < \frac{F\,M}{R_k} \int\limits_0^{R_k} e^{-\varrho_1 t}\, d\varrho_1 ,$$

wo M eine obere Schranke für $\left| \varrho \left(\varrho\, G - \frac{1}{2i}\, e^{i\varrho(x-\xi)} \right) \right|$ bezeichnet. Man erkennt, daß

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{H_{k,a}} e^{-\varrho t}\, d\varrho \int\limits_0^x \left(\varrho\, G - \frac{1}{2i}\, e^{i\varrho(x-\xi)} \right) f(\xi)\, d\xi = 0. \tag{5, 3}$$

Entsprechendes erhält man für das Integrationsintervall $\langle x, 1\rangle$ und die Wege $H_b, \ldots$ Die Abschätzung von

$$\int\limits_{D_{k,a}} e^{-\varrho t}\, d\varrho \int\limits_0^x \left(\varrho\, G - \frac{1}{2i}\, e^{i\varrho(x-\xi)} \right) f\, d\xi \tag{5, 4}$$

und der analog gebildeten Integrale begegnet wieder ähnlichen Schwierigkeiten, wie die Abschätzung der entsprechenden Integrale in § 4. Sie lassen sich durch das gleiche Verfahren überwinden. Man erhält für fast alle x

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{D_{k,a}} e^{-\varrho t}\, d\varrho \int\limits_0^x \left(\varrho\, G - \frac{1}{2i}\, e^{i\varrho(x-\xi)} \right) f\, d\xi = \eta(\mathsf{P}) \tag{5, 5}$$

und die entsprechende Beziehung für die Integrale über $\langle x, 1\rangle$ und $D_b, \ldots$

5, 2. Die weiteren Überlegungen können sich, da für $t \to 0$ auch

$$\int\limits_{I_a} e^{-\varrho t}\, d\varrho \int\limits_0^x \left(\varrho\, G - \frac{1}{2i}\, e^{i\varrho(x-\xi)} \right) f\, d\xi - \int\limits_{I_a} e^{\varrho t}\, d\varrho \int\limits_0^x \left(\varrho\, G - \frac{1}{2i}\, e^{i\varrho(x-\xi)} \right) f\, d\xi$$

$$= 2i \int\limits_{I_a} \sin i\varrho t\, d\varrho \int\limits_0^x \left(\varrho\, G - \frac{1}{2i}\, e^{i\varrho(x-\xi)} \right) f\, d\xi$$

und die weiteren analog zusammengefaßten Integrale verschwinden, auf die Ausdrücke

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{D_k^{(1)}} e^{-\varrho t}\, d\varrho \int\limits_0^x \pm \frac{1}{2i}\, e^{\pm i\varrho(x-\xi)}\, f(\xi)\, d\xi, \qquad \lim_{k\to\infty} \int\limits_{D_k^{(1)}} e^{-\varrho t}\, d\varrho \int\limits_x^1 \pm \frac{1}{2i}\, e^{\pm i\varrho(\xi-x)}\, f(\xi)\, d\xi$$

und die entsprechenden für $D_k^{(2)}$ beschränken. Nach dem Cauchyschen Satz gilt

$$\lim_{k\to\infty} \pm \frac{1}{2i} \left\{ \int\limits_{D_k^{(1)}} e^{-\varrho t}\, d\varrho \int\limits_0^x e^{\pm i\varrho(x-\xi)}\, f\, d\xi + \int\limits_{D_k^{(1)}} e^{-\varrho t}\, d\varrho \int\limits_x^1 e^{\pm i\varrho(\xi-x)}\, f\, d\xi + \int\limits_{D_k^{(2)}} \int\limits_0^x + \int\limits_{D_k^{(2)}} \int\limits_x^1 \right\} \tag{5, 6}$$

$$= \lim_{k\to\infty} 2i \left\{ \int\limits_0^{R_k} e^{-\varrho_1 t}\, d\varrho_1 \int\limits_0^x \cos \varrho_1(x-\xi)\, f\, d\xi + \int\limits_0^{R_k} e^{-\varrho_1 t}\, d\varrho_1 \int\limits_x^1 \cos \varrho_1(\xi - x)\, f\, d\xi \right\}.$$

Die Vertauschung der Integrationen ist wieder gestattet, und da für alle R_k

$$\left| f(\xi) \int\limits_0^{R_k} \cos \varrho_1(x-\xi)\, e^{-\varrho_1 t}\, d\varrho_1 \right| < \Psi(\xi) ,$$

wo $\Psi(\xi)$ eine L-integrierbare Funktion bedeutet, erlaubt der Lebesguesche Konvergenzsatz zu schließen:

(5, 7) $$\lim_{k\to\infty}\int_0^{Rk} e^{-\varrho_1 t}\,d\varrho_1\int_0^x \cos\varrho_1(x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi=\int_0^x f(\xi)\,d\xi\int_0^\infty \cos\varrho_1(x-\xi)\,e^{-\varrho_1 t}\,d\varrho_1=\int_0^x f(\xi)\,\frac{t}{t^2+(x-\xi)^2}\,d\xi$$

und

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{Rk} e^{-\varrho_1 t}\,d\varrho_1\int_x^1 \cos\varrho_1(\xi-x)\,f(\xi)\,d\xi=\int_x^1 f(\xi)\,\frac{t}{t^2+(x-\xi)^2}\,d\xi.$$

Da aber

$$\left|\int_0^{x-\Delta x} f(\xi)\,\frac{t}{t^2+(x-\xi)^2}\,d\xi\right|\leqq\frac{t}{t^2+(\Delta x)^2}F$$

und

$$\left|\int_{x+\Delta' x}^1 f(\xi)\,\frac{t}{t^2+(\xi-x)^2}\,d\xi\right|\leqq\frac{t}{t^2+(\Delta' x)^2}F\,,$$

ist

(5, 8) $$\lim_{t\to 0}\int_0^{x-\Delta x} f(\xi)\,\frac{t}{t^2+(x-\xi)^2}\,d\xi=0\quad\text{und}\quad\lim_{t\to 0}\int_{x+\Delta' x}^1 f(\xi)\,\frac{t}{t^2+(\xi-x)^2}\,d\xi=0$$

Weiterhin ist

$$\int_{\Delta x}^x f(\xi)\,\frac{t}{t^2+(x-\xi)^2}\,d\xi=\left[\frac{t}{t^2+(x-\xi)^2}\int_\xi^x f(\eta)\,d\eta\right]_{\xi=x}^{\xi=x-\Delta x}+\int_{x-\Delta x}^x\frac{2t(x-\xi)^2}{(t^2+(x-\xi)^2)^2}\left(\frac{1}{x-\xi}\int_\xi^x f(\eta)\,d\eta\right)d\xi.$$

Das erste Glied der rechten Seite konvergiert für $t\to 0$ gegen Null. Das zweite Glied wird wie oben in § 4 erweitert und zerlegt. Dabei ist für hinreichend kleines δ

(5,9) $$\left|\int_{x-\delta}^x\frac{2(x-\xi)^2 t}{(t^2+(x-\xi)^2)^2}\left(\frac{1}{x-\xi}\int_\xi^x f(\eta)\,d\eta-D_x^- f\right)d\xi\right|<\varepsilon\int_{x-\delta}^x\frac{2(x-\xi)^2 t}{(t^2+(x-\xi)^2)^2}\,d\xi<\varepsilon\,\frac{\pi}{2},$$

da für alle $t>0$

$$\int_{x-\delta}^x\frac{2(x-\xi)\,t}{(t^2+(x-\xi)^2)^2}\,d\xi<\frac{\pi}{2}.$$

Ebenso wird für hinreichend kleine δ'

$$\left|\int_x^{x+\delta'}\frac{2(x-\xi)^2 t}{(t^2+(x-\xi)^2)^2}\left(\frac{1}{\xi-x}\int_x^\xi f(\eta)\,d\eta-D_x^+ f\right)d\xi\right|<\varepsilon\,\frac{\pi}{2}.$$

Wie oben in § 4 läßt sich also schließen, daß

(5, 10) $$\lim_{t\to 0}\int_0^x f(\xi)\,\frac{t}{t^2+(x-\xi)^2}\,d\xi=\frac{\pi}{2}\,D_x^- f$$

und

$$\lim_{t\to 0}\int_x^1 f(\xi)\,\frac{t}{t^2+(\xi-x)^2}\,d\xi=\frac{\pi}{2}\,D_x^+ f,$$

woraus endlich folgt:

$$(5,11)\qquad \lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{D_k^{(1)}}\varrho e^{-\varrho t}\,d\varrho\int_0^x Gf\,d\xi+\int\limits_{D_k^{(2)}}\varrho e^{\varrho t}\,d\varrho\int_0^x Gf\,d\xi\right\}\sim\frac{1}{2}D_x^- f$$

und

$$\lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{D_k^{(1)}}\varrho e^{-\varrho t}\,d\varrho\int_x^1 Gf\,d\xi+\int\limits_{D_k^{(2)}}\varrho e^{\varrho t}\,d\varrho\int_x^1 Gf\,d\xi\right\}\sim\frac{1}{2}D_x^+ f.$$

Für $x=0$ nimmt der zweite Ausdruck den Wert $D_0^+ f$, für $x=1$ der erste den Wert $D_1^- f$ an, vorausgesetzt, daß die Derivierten für diese Werte von x existieren.

§ 6. Berechnung von $\lim\limits_{t\to 0} v^{(2)}(x,t)$.

6, 0. Wie in § 4 fügen wir dem Integral über C_k ein weiteres über E_k hinzu. Wir müssen dann aber, da $\varrho\dfrac{\mathfrak{Sin}\,\varrho\,(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}$ in $\pm ki\pi$ (wo k die Reihe aller natürlichen Zahlen durchläuft) Pole 1. Ordnung besitzt, die Summe der Residuen in diesen Punkten subtrahieren. Es ist also

$$\lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k}\varrho\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho\,(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}\,d\varrho\int_0^1 G(x,\xi;\varrho^2)\,f(\xi)\,d\xi$$

$$=\lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k+E_k}\varrho\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}\,d\varrho\int_0^1 Gf\,d\xi-2\cdot\sum_1^{N_k} i\pi\nu(-1)^\nu\,\mathfrak{Sin}\,i\pi\nu(1-t)\int_0^1 Gf\,d\xi\right.$$

Der Weg D_k+E_k ist, da die zweimal in entgegengesetztem Sinn durchlaufenen Diagonalen keine Berücksichtigung fordern, frei von Wegteilen, auf denen ϱG nicht durch seine asymptotische Darstellung ersetzt werden könnte. Die Bezeichnung der Teilwege schließt sich den in § 4 getroffenen Festsetzungen an.

6, 1. Für $V_{k,a}, V_{k,b}, \ldots$ ist, da stets $t\leqq 1$,

$$(6,1)\qquad \frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho\,(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}=e^{\pm\varrho t}O(1),$$

wobei das positive Zeichen für die linke und das negative für die rechte Halbebene in Geltung ist. Dann ist [vgl. (5, 1) und (5, 2)]

$$(6,2)\qquad \lim_{k\to\infty}\int\limits_{V_{k,a}}\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho\,(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}\,d\varrho\int_0^x\left(\varrho G-\frac{1}{2i}e^{i\varrho(x-\xi)}\right)f\,d\xi=0,$$

und das Entsprechende für das Intervall $\langle x,1\rangle$ und die Wege $V_{k,b}$, $V_{k,c}$ und $V_{k,d}$. Ebenso erkennt man im Anschluß an die in 5, 1 durchgeführten Überlegungen, daß

$$(6,3)\qquad \lim_{k\to\infty}\int\limits_{H_{k,a}}\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho\,(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}\,d\varrho\int_0^x\left(\varrho G-\frac{1}{2i}e^{i\varrho(x-\xi)}\right)f\,d\xi=0$$

und

$$(6,4)\qquad \lim_{k\to\infty}\int\limits_{H_{k,a}}\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho\,(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}\,d\varrho\int_x^1\left(\varrho G-\frac{1}{2i}e^{i\varrho(\xi-x)}\right)f\,d\xi=0.$$

Analoge Ergebnisse erhält man für $H_{k,b},\ldots$

6, 2. Es verbleibt nur noch die Berechnung von

$$\lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{C_k+E_k}\pm\frac{1}{2i}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho\,(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}\,d\varrho\int_0^x e^{\pm i\varrho(x-\xi)}f\,d\xi\pm\int_{C_k+E_k}+\frac{1}{2i}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho\,(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}\,d\varrho\int_x^1 e^{\pm i\varrho(\xi-x)}f\,d\xi\right\}.$$

Der angegebene Ausdruck kann ersetzt werden durch

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{i\int_{-R_k}^{R_k}\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho_1\,(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho_1}\,d\varrho_1\int_0^x\cos\varrho_1(x-\xi)f\,d\xi+i\int_{-R_k}^{R_k}\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho_1\,(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho_1}\,d\varrho_1\int_x^1\cos\varrho_1(\xi-x)f\,d\xi+\Sigma_k\right.$$

(6, 5)

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{R_k}\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho_1\,(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho_1}\,d\varrho_1\int_0^x\cos\varrho_1(x-\xi)f\,d\xi+\int_0^{R_k}\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho_1\,(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho_1}\,d\varrho_1\int_x^1\cos\varrho_1(\xi-x)f\,d\xi+\Sigma_k\right.$$

Dabei ist

$$\Sigma_k=2\sum_1^{N_k}\frac{1}{2i}(-1)^\nu\,\mathfrak{Sin}\,i\nu\pi\,(1-t)\int_0^x e^{-\nu\pi(x-\xi)}f\,d\xi+2\sum_1^{N_k}\frac{1}{2i}(-1)^\nu\,\mathfrak{Sin}\,i\nu\pi\,(1-t)\int_x^1 e^{-\nu\pi(\xi-x)}f\,d\xi\ ^{10}).$$

Nun existiert gleichmäßig in ξ

$$\int_0^\infty\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho_1\,(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho_1}\cos\varrho_1(x-\xi)\,d\varrho_1=\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin\pi t}{\mathfrak{Cof}\,\pi(x-\xi)-\cos\pi t}.$$

In (6, 5) darf daher nach Vertauschung der Integrationsfolge der Grenzübergang $k\to\infty$ unter dem Integral vorgenommen werden, so daß wir aus (6, 3) für $k\to\infty$ erhalten:

$$\text{(6, 6)}\quad\frac{1}{2}\left\{\int_0^x f(\xi)\,\frac{\sin\pi t}{\mathfrak{Cof}\,\pi(x-\xi)-\cos\pi t}\,d\xi+\int_x^1 f(\xi)\,\frac{\sin\pi t}{\mathfrak{Cof}\,\pi(\xi-x)-\cos\pi t}\,d\xi\right\}+\lim_{k\to\infty}\Sigma_k.$$

Die Untersuchungen über den Grenzwert von (6, 6) für $t\to 0$ dürfen sich auf kleine Intervalle in der Umgebung von x beschränken. Nun ist

$$\int_{x-\Delta x}^x f(\xi)\,\frac{\sin\pi t}{\mathfrak{Cof}\,\pi(x-\xi)-\cos\pi t}\,d\xi=\frac{\sin\pi t}{\mathfrak{Cof}\,\pi\,\Delta x-\cos\pi t}\int_{x-\Delta x}^x f(\xi)\,d\xi$$

$$+\int_{x-\Delta x}^x\frac{\pi\,\mathfrak{Sin}\,\pi(x-\xi)\,\sin\pi t}{(\mathfrak{Cof}\,\pi(x-\xi)-\cos\pi t)^2}(x-\xi)\left\{\frac{1}{x-\xi}\int_\xi^x f(\eta)d\eta-D_x^-f\right\}d\xi \qquad \text{(6, 7)}$$

$$+D_x^-f\int_{x-\Delta x}^x\frac{\pi\,\mathfrak{Sin}\,\pi(x-\xi)\,\sin\pi t}{(\mathfrak{Cof}\,\pi(x-\xi)-\cos\pi t)^2}(x-\xi)\,d\xi.$$

Das erste Glied des erhaltenen Ausdrucks verschwindet für $t\to 0$. Das letzte Glied ergibt bei Integration

$$-D_x^-f\,\frac{\sin\pi t}{\mathfrak{Cof}\,\pi\Delta x-\cos\pi t}+D_x^-f\,\frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\,\frac{e^{\pi(x-\xi)}-\cos\pi t}{\sin\pi t}\right]_{\xi=x-\Delta x}^{\xi=x},$$

was für $t\to 0$ übergeht in D_x^-f, sofern diese Derivierte an der betreffenden Stelle existiert. Für das zweite Glied in (6, 7) läßt sich eine Abschätzung angeben. Es ist

$$\left|\int_{x-\Delta x}^x\frac{\pi\,\mathfrak{Sin}\,\pi(x-\xi)\,\sin\pi t}{(\mathfrak{Cof}\,\pi(x-\xi)-\cos\pi t)^2}(x-\xi)\left\{\frac{1}{x-\xi}\int_\xi^x f\,d\eta-D_x^-f\right\}d\xi\right|<\varepsilon\left(\frac{2\,\Delta x\,\pi\,t}{\pi^2(\Delta x)^2}+1\right).$$

---

[10]) N_k bezeichnet die Zahl der von E_k umfaßten, auf der positiven imaginären Achse der ϱ-Ebene gelegenen Pole der Funktion $\dfrac{\mathfrak{Sin}\,\varrho(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}$.

Für hinreichend klein gewählte t wird demnach auch das zweite Glied beliebig klein. Es ist folglich

$$\lim_{t\to 0}\int_0^x f(\xi)\frac{\sin \pi t}{\mathfrak{Cof}\,\pi(x-\xi)-\cos \pi t}\,d\xi = D_x^- f.$$

Die für das Intervall $\langle x, 1\rangle$ entsprechend durchgeführten Überlegungen ergeben

$$\lim_{t\to 0}\int_x^1 f(\xi)\frac{\sin \pi t}{\mathfrak{Cof}\,\pi(\xi-x)-\cos \pi t}\,d\xi = D_x^+ f.$$

6, 3. Nach den bisherigen Rechnungen ist also

$$\lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{D_k}\varrho\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}\,d\varrho\int_0^1 G(x,\xi;\varrho^2)\,d\xi = \frac{1}{2}\,(D_x^- f + D_x^+ f)$$

$$(6,8)\quad -2\lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}\Big\{\sum_1^{N_k} i\pi\nu(-1)^\nu\,\mathfrak{Sin}\,i\pi\nu(1-t)\int_0^1 G(x,\xi;(i\pi\nu)^2)\,f\,d\xi$$

$$-\sum_1^{N_k}\frac{1}{2i}(-1)^\nu\,\mathfrak{Sin}\,i\pi\nu(1-t)\int_0^x e^{-\nu\pi(x-\xi)}f\,d\xi-\sum_1^{N_k}\frac{1}{2i}(-1)^\nu\,\mathfrak{Sin}\,i\pi\nu(1-t)\int_x^1 e^{-\nu\pi(\xi-x)}f(\xi)\,d\xi\Big\}.$$

Nun ist

$$i\nu\pi G(x,\xi;(i\pi\nu)^2)-\frac{1}{2i}\,e^{-\nu(x-\xi)} = \frac{1}{2i}\,e^{-\nu(x-\xi)}\,O\left(\frac{1}{\nu}\right)\qquad \text{für } 0\leqq\xi\leqq x$$

und

$$i\nu\pi G(x,\xi;(i\pi\nu)^2)-\frac{1}{2i}\,e^{-\nu(\xi-x)} = \frac{1}{2i}\,e^{-\nu(\xi-x)}\,O\left(\frac{1}{\nu}\right)\qquad \text{für } x\leqq\xi\leqq 1.$$

Also sind die Reihen in (6, 8) für $\lim k=\infty$ gleichmäßig in t konvergent. Für $t\to 0$ ergeben sie Null. Man erhält also schließlich

$$\lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{D_k}\varrho\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}\,d\varrho\int_0^1 G(x,\xi;\varrho^2)\,f(\xi)\,d\xi \sim f(x).$$

§ 7. Beweis der mittleren Konvergenz der Lösungen gegen $f(x)$ für $t\to 0$.

7, 0. Der Cauchysche Residuensatz angewandt auf $G(x,\xi;\varrho^2)$ als Funktion in ϱ ergibt in Rücksicht auf 0, 5—0, 7:

$$u(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\varrho_\nu\,e^{-\varrho_\nu^2 t}\int_0^1 G(x,\xi;\varrho_\nu^2)\,f(\xi)\,d\xi,$$

$$(7,1)\qquad v^{(1)}(x,t) = \sum_1^{\infty} 2\varrho_\nu e^{-\varrho_\nu t}\int_0^1 G(x,\xi;\varrho_\nu^2)\,f(\xi)\,d\xi,$$

$$v^{(2)}(x,t) = \sum_1^{\infty} 2\varrho_\nu\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu}\int_0^1 G(x,\xi;\varrho_\nu^2)\,f(\xi)\,d\xi.$$

ϱ_ν bezeichnet dabei den ν-ten Pol der Funktion $\varrho\cdot G(\varrho^2)$. Die Zählung schreitet vom Nullpunkt auf der reellen Achse in positiver Richtung fort und berücksichtigt nur die in der Halbebene $\Re(\varrho)>0$ gelegenen Pole. Die Residuen der Funktion $\varrho\cdot G(\varrho^2)$ sind ausführlich [vgl. (2, 3)]

$$(7,2)\qquad R_\nu = \frac{\varrho_\nu}{\left(\frac{dW(\varrho^2)}{d\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_\nu}} \left\{ y_1(x;\varrho_\nu^2) \int_x^1 y_2(\xi;\varrho_\nu^2)\, f\, d\xi + y_2(x;\varrho_\nu^2) \int_0^x y_1(\xi;\varrho_\nu^2)\, f\, d\xi \right\}.$$

Um (7, 2) noch zu vereinfachen, normieren wir die (linear abhängigen) Eigenfunktionen y_1 und y_2, indem wir setzen

$$\varphi_\nu(x) = \frac{y_1(x;\varrho_\nu^2)}{\sqrt{\int_0^1 (y_1(x;\varrho_\nu^2))^2\, dx}} = \frac{y_2(x;\varrho_\nu^2)}{\sqrt{\int_0^1 (y_2(x;\varrho_\nu))^2\, dx}}.$$

Da

$$(7,3)\quad \int_0^1 y_1(x;\varrho_\nu^2)\, y_2(x;\varrho_\nu^2)\, dx = \sqrt{\left(\int_0^1 (y_1(x;\varrho_\nu^2))^2\, dx\right)\left(\int_0^1 (y_2(x;\varrho_\nu^2))^2\, dx\right)} = \frac{1}{2\varrho_\nu}\left(\frac{dW(\varrho^2)}{d\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_\nu},$$

erhält man für die Residuen die Darstellung

$$R_\nu = \frac{\varphi_\nu(x)}{2} \int_0^1 \varphi_\nu(\xi)\, f(\xi)\, d\xi .$$

Wenn $\int_0^1 \varphi_\nu(\xi)\, f(\xi)\, d\xi = c_\nu$ gesetzt wird, erhält man also:

$$u(x,t) = \sum_1^\infty e^{-\varrho_\nu^2 t}\, c_\nu\, \varphi_\nu(x),$$

$$(7,4)\qquad v^{(1)}(x,t) = \sum_1^\infty e^{-\varrho_\nu t}\, c_\nu\, \varphi_\nu(x),$$

$$v^{(2)}(x,t) = \sum_1^\infty \frac{\mathfrak{Sin}\, \varrho_\nu(1-t)}{\mathfrak{Sin}\, \varrho_\nu}\, c_\nu\, \varphi_\nu(x).$$

7, 1. Für $t > 0$ läßt sich die Parsevalsche Gleichung sofort gewinnen; es ist z. B.

$$\int_0^1 [u(x,t)]^2\, dx = \int_0^1 \left\{ u(x,t) \sum_1^\infty e^{-\varrho_\nu^2 t}\, c_\nu\, \varphi_\nu(x) \right\} dx,$$

und da nach den in 3, 2 angestellten Überlegungen der Integrand des zuletzt gewonnenen Ausdrucks in x gleichmäßig konvergent ist, gilt

$$\int_0^1 [u(x,t)]^2\, dx = \sum_{\nu=1}^\infty e^{-\varrho_\nu^2 t}\, c_\nu \int_0^1 u(x,t)\, \varphi_\nu(x)\, dx .$$

Setzt man rechterhand (7, 3) ein, so erhält man

$$\int_0^1 [u(x,t)]^2\, dx = \sum_{\nu=1}^\infty e^{-2\varrho_\nu^2 t}\, c_\nu^2 .$$

Entsprechende Darstellungen gewinnt man für $v^{(1)}(x,t)$ und $v^{(2)}(x,t)$.

7, 2. Für unser quadratisch integrierbar vorausgesetztes $f(x)$ gilt zufolge der Besselschen Ungleichung

$$(7,5)\qquad \int_0^1 [f(x)]^2\, dx \geqq \sum_{\nu=1}^n c_\nu^2$$

für jedes noch so große n. Die Existenz von $\sum_{\nu=1}^\infty c_\nu^2$ ist damit sichergestellt. Nach einem

Satz von Fatou [11]) gilt für eine Folge $f_1, f_2, \ldots$ von positiven, beschränkten, L-summierbaren Funktionen, die gegen eine L-summierbare Funktion $f(x)$ konvergiert,

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \varliminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,,$$

wenn nur die Folge der Integrale $\int_a^b f_n(x)\,dx$ beschränkt bleibt. Wenden wir diesen Satz auf die Folge $[u(x,t_1)]^2, [u(x,t_2)]^2, \ldots$ mit $t_\nu \to 0$ an, die, weil sie nach (4, 27) mit $t \to 0$ gegen $f(x)$ konvergiert, und wegen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-2\varrho_\nu^2 t}\, c_\nu^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2,$$

die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, so ergibt sich

$$\int_0^1 [f(x)]^2\,dx \leqq \varliminf_{t\to 0} \int_0^1 [u(x,t)]^2\,dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2,$$

woraus nach (7, 5) folgt:

$$\int_0^1 [f(x)]^2\,dx = \sum_1^{\infty} c_\nu^2. \tag{7,6}$$

Es bleibt uns noch zu zeigen, daß $u(x,t)$, $v^{(1)}(x,t)$ und $v^{(2)}(x,t)$ für $t \to 0$ „im Mittel" gegen $f(x)$ konvergieren. Die Parsevalsche Gleichung [vgl. (7, 6)] liefert für $u(x,t) - f(x)$

$$\int_0^1 [u(x,t) - f(x)]^2\,dx = \sum_1^{\infty} (e^{-\varrho_\nu^2 t} - 1)^2\, c_\nu^2$$

und entsprechende Ausdrücke für $v^{(1)}(x,t)$ und $v^{(2)}(x,t)$. Da $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2$ konvergiert, gilt

$$\lim_{t\to 0} \int_0^1 [u(x,t) - f(x)]^2\,dx = \lim_{t\to 0} \sum_{\nu=1}^{\infty} (e^{-\varrho_\nu^2 t} - 1)^2\, c_\nu^2 = 0. \tag{7,7}$$

Dasselbe erhält man für $v^{(1)}(x,t)$ und $v^{(2)}(x,t)$. Ebenso erlaubt die Reihendarstellung aus 7, 1 zu folgern:

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 [v^{(1)}(x,t)]^2\,dx = 0$$

und

$$\lim_{t\to 1} \int_0^1 [v^{(2)}(x,t)]^2\,dx = 0.$$

Damit sind alle in der Einleitung gestellten Aufgaben erledigt und unsere Probleme im dort ausgesprochenen Sinn gelöst.

§ 8. Integraldarstellung für eine über das Gebiet $\langle 0, \infty\rangle$ summierbar vorausgesetzte Funktion $f(x)$.

8, 0. Der letzte Abschnitt der Arbeit soll zeigen, wie mit den bisher entwickelten Methoden unsere Randwertaufgaben für das Grundgebiet $\langle 0, \infty\rangle$ der Veränderlichen x gelöst werden können. Wir gehen davon aus, daß die Gleichung

[11]) Fatou, Acta Mathem. Bd. 30 (1906), Seite 375.

(8, 1) $$y''(x) + \varrho^2 \cdot y(x) = l(x)\, y(x)$$

unter gewissen Voraussetzungen eine Lösung besitzt, die für jedes ϱ mit $\varrho_2 \geqq 0$ durch

(8, 2) $$e^{i\varrho x}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right)$$

asymptotisch dargestellt werden kann. Man beweist die Existenz dieser Lösung durch Betrachtungen, die sich an die vermittelst $s = e^{-x}$ transformierte Gleichung (8, 1):

(8, 3) $$s^2 \frac{d^2y}{ds^2} + s \frac{dy}{ds} + (\varrho^2 - \hat{l}(s))\, y(s) = 0$$

anschließen [12]). Für $l(x)$ ist die Existenz von $\int_0^\infty |l(x)|\, dx$ und für $\hat{l}(s)$ der analytische Charakter dieser Funktion zu fordern; außerdem soll $\hat{l}(s)$ in $s = 0$ eine Nullstelle besitzen. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so erweist sich die durch (8, 2) gekennzeichnete Lösung als reguläre Funktion von ϱ, wenn nur $\varrho_2 \geqq 0$. Wir machen sie zur Komponente $y_1(x; \varrho)$ der Greenschen Funktion. Die zweite Komponente $y_2(x; \varrho)$ legen wir durch die Anfangsbedingungen $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = \varrho$ fest. Für y_2 erhalten wir die Darstellung

(8, 4) $$y_2(x; \varrho) = \sin \varrho x + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) e^{-i\varrho x}.$$

y_1 und y_2 sind für alle Werte von ϱ voneinander linear unabhängig [12]), so daß die Funktion

(8, 5) $$\varrho \cdot G(x, \xi; \varrho) = \begin{cases} -\dfrac{y_1(\xi)\, y_2(x)}{y_1(0)}, & x \leqq \xi, \\ -\dfrac{y_2(\xi)\, y_1(x)}{y_1(0)}, & 0 \leqq \xi \leqq x, \end{cases}$$

keinen Pol hat. Im Winkelraum $\delta < \arg \varrho < \pi - \delta$ gilt wieder

$$\varrho \cdot G(x, \xi; \varrho) = \begin{cases} \dfrac{1}{2i} e^{i\varrho(\xi - x)}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{\varrho}\right)\right), & x \leqq \xi, \\ \dfrac{1}{2i} e^{i\varrho(x - \xi)}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{\varrho}\right)\right), & 0 \leqq x \leqq \xi, \end{cases}$$

wenn $x \neq 0$ vorausgesetzt wird. Für $0 \leqq \arg \varrho \leqq \delta$ und $\pi - \delta \leqq \arg \varrho \leqq \pi$ ist wieder $\varrho G = O(1)$ zu setzen.

8, 1. Wir untersuchen jetzt die Ausdrücke:

(8, 6) $$\lim_{t \to 0} \lim_{k \to \infty} \left\{ \int_{C_k'} \varrho\, e^{-\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^\infty G(x, \xi; \varrho)\, f\, d\xi + \int_{E_k'} \varrho\, e^{\varrho^2 t}\, d\varrho \int_0^\infty G(x, \xi; \varrho)\, f(\xi)\, d\xi \right\},$$

(8, 7) $$\lim_{t \to 0} \lim_{k \to \infty} \left\{ \int_{D_k^{(1)\prime}} \varrho\, e^{-\varrho t}\, d\varrho \int_0^\infty G(x, \xi; \varrho)\, f(\xi)\, d\xi + \int_{D_k^{(2)\prime}} \varrho\, e^{\varrho t}\, d\varrho \int_0^\infty G(x, \xi; \varrho)\, f(\xi)\, d\xi \right\},$$

(8, 8) $$\lim_{t \to 0} \lim_{k \to \infty} \left\{ \int_{C_k'} \varrho \frac{\mathfrak{Sin}\, \varrho(1 - t)}{\mathfrak{Sin}\, \varrho}\, d\varrho \int_0^\infty G(x, \xi; \varrho)\, f(\xi)\, d\xi + \int_{E_k'} \varrho \frac{\mathfrak{Sin}\, \varrho(1 - t)}{\mathfrak{Sin}\, \varrho}\, d\varrho \int_0^\infty G(x, \xi; \varrho)\, f(\xi)\, d\xi \right\},$$

wobei unter C_k', D_k' und E_k' die in der oberen Halbebene liegenden Hälften der früheren Integrationswege C_k, D_k und E_k [13]) verstanden seien. Die Bezeichnung der Teilwege ist

---

[12]) Kneser, a. a. O. [4]) Seite 221 ff.

[13]) Als Zahlenfolge R_k, die nach 2, 4 die Folgen C_k, D_k und E_k der Integrationswege bestimmt, darf jetzt jede abzählbare, gegen Unendlich konvergierende Zahlenfolge gewählt werden.

wie oben gewählt. Die zur Auswertung von (8, 6)–(8, 8) notwendigen Überlegungen schließen sich weitgehend an die in §§ 4, 5 und 6 dargestellten an und sind größtenteils formal identisch mit ihnen. Im parabolischen Fall sind nur die Gleichungen (4, 4) und (4, 6) neu zu beweisen. Es ist

$$(8,9)\qquad \left|\int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\,d\varrho \int_{x+\Delta' x}^{\infty} \Omega_2\, e^{i\varrho(\xi-x)} f\,d\xi\right| < M F \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}|\mathsf{P}|\ \Delta' x}}{|\mathsf{P}|\ \Delta' x \dfrac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Dabei steht F für $\int_0^\infty |f(\xi)|\,d\xi$, und M ist eine obere Schranke für $\Omega_2(x, \xi; \varrho)$. Es ist zufolge (8, 9)

$$\lim_{k\to\infty} \int_{D_{k,a}} e^{-\varrho^2 t}\,d\varrho \int_{x+\Delta' x}^{\infty} \Omega_2\, e^{i\varrho(\xi-x)} f\,d\xi = \eta(\mathsf{P}).$$

Analoge Beziehungen findet man für die Integrationswege $D_{k,b}, \ldots E_{k,a}, \ldots$ Das weitere unterscheidet sich nicht mehr von den Rechnungen in § 4. Wir dürfen sofort schließen auf:

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{k\to\infty}\left\{\int_{C_k'} \varrho\, e^{-\varrho^2 t}\,d\varrho \int_0^\infty G f\,d\xi + \int_{E_k'} \varrho\, e^{\varrho^2 t}\,d\varrho \int_0^\infty G f\,d\xi\right\}$$

$$= \lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty} i\left\{\int_0^{R_k} e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1 \int_0^x \cos\varrho_1(x-\xi) f(\xi)\,d\xi + \int_0^{R_k} e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1 \int_x^\infty \cos\varrho_1(\xi - x) f\,d\xi\right\}.$$

Die Vertauschung der Integrationsfolge in dem erhaltenen Ausdruck ist gestattet [9]), der Grenzübergang unter dem Integralzeichen durch den Lebesgueschen Konvergenzsatz gerechtfertigt. Man erhält also

$$\lim_{k\to\infty} i\int_0^{R_k} e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1 \int_0^x \cos\varrho_1(x-\xi) f(\xi)\,d\xi = i\int_0^x f(\xi)\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi$$

und

$$\lim_{k\to\infty} i\int_0^{R_k} e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1 \int_x^\infty \cos\varrho_1(\xi - x) f(\xi)\,d\xi = i\int_x^\infty f(\xi)\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi.$$

Da

$$\left|\int_{x+\Delta' x}^{\infty} f(\xi)\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi\right| < \sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(\Delta' x)^2}{4t}} F,$$

ist auch

$$\lim_{t\to 0}\int_{x+\Delta' x}^{\infty} f(\xi)\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi = 0,$$

womit die Rechnung wieder auf die oben in § 4 ausgeführte zurückgeleitet ist. Es ist also schließlich

$$(8,10)\qquad \lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}\left\{\int_{C_k'} \varrho\, e^{-\varrho^2 t}\,d\varrho \int_0^\infty G f\,d\xi + \int_{E_k'} \varrho\, e^{\varrho^2 t}\,d\varrho \int_0^\infty G f\,d\xi\right\} \sim i\pi\cdot f(x).$$

Entsprechend erhält man

$$(8,11)\qquad \lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}\left\{\int_{D_k^{(1)'}} \varrho\, e^{-\varrho t}\,d\varrho \int_0^\infty G f\,d\xi + \int_{D_k^{(2)'}} \varrho\, e^{\varrho t}\,d\varrho \int_0^\infty G f\,d\xi\right\} \sim i\pi\cdot f(x)$$

und

$$(8,12)\quad \lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}\Big\{\int_{C_k'+E_k'}\varrho\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho\,(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}\,d\varrho\int_0^\infty G\,f\,d\xi-2\pi i\sum_1^{N_k} i\pi\nu\,(-1)^\nu\,\mathfrak{Sin}\,i\pi\nu(1-t)\int_0^\infty G\,f\,d\xi\Big\}\sim i\pi\cdot f(x).$$

8, 2. Die gewonnenen Äquivalenzbeziehungen ergeben sofort Integraldarstellungen für $f(x)$. Es ist

$$(8,13)\quad \lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}\int_{C_k'}\varrho e^{-\frac{1}{2}\varrho^2 t}\,d\varrho\int_0^\infty G\,f\,d\xi=-\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\varrho_1\,e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1\int_0^\infty G\,f\,d\xi\sim i\pi\cdot f(x)$$

und entsprechend für (8, 11) und (8, 12). Durch einige Festsetzungen lassen sich indes glattere Formen gewinnen. Reelle ϱ vorausgesetzt ist nämlich

$$y_1(x;\varrho)=\overline{y_1(x;-\varrho)}\,.$$

Für $y_2(x;\varrho)$ gilt, wie man aus (8, 1) und den Anfangsbedingungen für y_2 erkennt,

$$y_2(x;\varrho)=-\,y_2(x;-\varrho).$$

Es ist also

$$(8,14)\qquad [\varrho\cdot G(x,\xi;\varrho)]_{\varrho=\varrho_1}=-\,\overline{[\varrho\cdot G(x,\xi;\varrho)]_{\varrho=-\varrho_1}}.$$

Wir dürfen demnach setzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varrho\,e^{-\varrho^2 t}\,d\varrho_1\int_0^\infty G(x,\xi;\varrho_1)\,f(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varrho_1\,e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1\int_0^\infty\{G(x,\xi;-\varrho_1)-G(x,\xi;\varrho_1)\}\,f(\xi)\,d\xi.$$

Es ist aber

$$G(x,\xi;-\varrho_1)-G(x,\xi;\varrho_1)=\begin{cases}\dfrac{y_2(x;\varrho_1)}{\varrho_1}\left[\dfrac{y_1(\xi;\varrho_1)}{y_1(0;\varrho_1)}-\dfrac{y_1(\xi;-\varrho_1)}{y_1(0;-\varrho_1)}\right], & x\leqq\xi,\\[2ex] \dfrac{y_2(\xi;\varrho_1)}{\varrho_1}\left[\dfrac{y_1(x;\varrho_1)}{y_1(0;\varrho_1)}-\dfrac{y_1(x;-\varrho_1)}{y_1(0;-\varrho_1)}\right], & 0\leqq\xi\leqq x\,.\end{cases}$$

Die Klammern in den erhaltenen Ausdrücken stellen eine Funktion $i\cdot v(x;\varrho)$ dar, für die

$$(8,15)\quad i\cdot v(x;\varrho_1)=\varrho_1\cdot y_2(x;\varrho_1)\,\frac{y_1'(0;\varrho_1)\,y_1(0;-\varrho_1)-y_1'(0;-\varrho_1)\,y_1(0;\varrho_1)}{y_1(0;\varrho_1)\,y_1(0;-\varrho_1)}$$

gilt. Wir setzen jetzt

$$\varphi(x;\varrho_1)=\sqrt[+]{\frac{y_2(x;\varrho_1)\,v(x;\varrho_1)}{\varrho_1}}.$$

Dann ist

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varrho_1\,e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1\int_0^\infty(G_{-\varrho_1}-G_{\varrho_1})\,f\,d\xi=i\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1\int_0^\infty\varphi(x;\varrho_1)\,\varphi(\xi;\varrho_1)\,f\,d\xi\,.$$

Es wird also schließlich:

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varrho_1^2 t}\,d\varrho_1\int_0^\infty\varphi(x;\varrho_1)\,\varphi(\xi;\varrho_1)\,f(\xi)\,d\xi\sim 2\pi\cdot f(x)\,,$$

$$\lim_{t\to 0}\Big\{\int_{-\infty}^{0}e^{\varrho_1 t}\,d\varrho_1\int_0^\infty\varphi(x;\varrho_1)\,\varphi(\xi;\varrho_1)\,f(\xi)\,d\xi+\int_0^\infty e^{-\varrho_1 t}\,d\varrho_1\int_0^\infty\varphi(x;\varrho_1)\,\varphi(\xi;\varrho_1)\,f(\xi)\,d\xi\Big\}\sim 2\pi\cdot f(x),$$

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho_1(1-t)}{\mathfrak{Sin}\,\varrho_1}\,d\varrho_1\int_0^\infty\varphi(x;\varrho_1)\,\varphi(\xi;\varrho_1)\,f(\xi)\,d\xi\sim 2\pi\cdot f(x).$$

Eingegangen 18. November 1931.

Über eine algebraische Aufgabe, welche in der Reduktions- und Transformationstheorie der algebraischen Funktionen auftritt.

Von *Kurt Heegner* in Berlin.

Die Beschäftigung mit den reduzierbaren Abelschen Integralen führte mich auf eine algebraische Aufgabe, welche ich für den Fall der regulären Körper nach speziellen Methoden behandelt habe [1]). In der vorliegenden Arbeit soll die Aufgabe eingehender formuliert werden und ihre Beziehung zur Gruppentheorie gegeben werden. Die Anwendung der Untersuchung auf Fragen der Reduktions- und Transformationstheorie der algebraischen Funktionen bleibt späteren Abhandlungen vorbehalten.

Abschnitt I. Formulierung der Aufgabe.

a) *Erläuterung der Aufgabe am Fall des Dieders.*

Die Resultate über das Dieder werden zur Vorbereitung der allgemeinen Theorie nochmals zur Ableitung gebracht. Gegeben sei eine reduzierte kubische Gleichung

$$x^3 - 3h_2 x - 2h_3 = 0 \tag{1}$$

mit den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Die Gesamtheit aller Tschirnhaustransformationen, die (1) wiederum in eine reduzierte kubische Gleichung überführen, ist durch die quadratische Funktion

$$cX = x^2 + xq - 2h_2 \tag{2}$$

gegeben, in welcher c und q willkürliche Parameter bedeuten. Die transformierte Gleichung sei

$$X^3 - 3H_2 X - 2H_3 = 0 \tag{3}$$

mit den Wurzeln $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3$. Für H_2 und H_3 werden die Formeln

$$\begin{aligned} c^2 H_2 &= q^2 h_2 + 2q h_3 + h_2^2 \\ c^3 H_3 &= q^3 h_3 + 3q^2 h_2^2 + 3\, q h_2 h_3 + 2h_3^2 - h_2^3 \end{aligned} \tag{4}$$

erhalten. Die Elimination von c ergibt für q eine Gleichung sechsten Grades:

$$\begin{aligned} (5)\quad H_2^3 : H_3^2 : H_2^3 - H_3^2 = (q^2 h_2 + 2q h_3 + h_2^2)^3 &: (q^3 h_3 + 3\, q^2 h_2^2 + 3 q h_2 h_3 + 2h_3^2 - h_2^3)^2 \\ &: (h_2^3 - h_3^2)\,(q^3 - 3h_2 q - 2h_3)^2 , \end{aligned}$$

deren Eigenschaften den Gegenstand der Untersuchung bilden. Die Parameter q und c lassen sich durch die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3$ von (1) und (3) ausdrücken. Zu diesem Zweck ist die quadratische Funktion

$$X = \begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 & \mathsf{A}_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & x \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & x^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} , \tag{6}$$

[1]) Math. Zeitschr. **31** (1930), 457. Zitiert als M. Z.

welche $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3$ überführt, mit (2) zu identifizieren. Dies ergibt

$$(7) \qquad c:q:1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 & \mathsf{A}_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 & \mathsf{A}_3 \end{vmatrix} .$$

Die Ausdrücke haben die Eigenschaft, in sich überzugehen, wenn auf die α und A zugleich dieselben Permutationen ausgeübt werden. Sobald aber nur die α bzw. A permutiert werden, liefert (7) die sechs voneinander verschiedenen Wurzeln der Gleichung (5). Jeder Ausdruck dieser Art erzeugt den durch q definierten Körper. So liefert das in den α und A symmetrische Element

$$(8) \qquad 3q_{(s)} = \alpha_1 \mathsf{A}_1 + \alpha_2 \mathsf{A}_2 + \alpha_3 \mathsf{A}_3$$

die Gleichung

$$(9) \qquad (q_{(s)}^3 - 3h_2 H_2 q_{(s)} - 2h_3 H_3)^2 - 4(h_2^3 - h_3^2)(H_2^3 - H_3^2) = 0 ,$$

die vermittels der Tschirnhaustransformation

$$(10) \qquad q(q_{(s)} h_2 H_3 + h_3 H_2^2) = \frac{1}{2} h_2 H_2 (q_{(s)}^2 - h_2 H_2) + 2 \frac{h_3^2 H_2^3 - h_2^3 H_3^2}{q_{(s)}^2 - 4h_2 H_2}$$

auf (5) zurückführt. Die Resultate (9) und (10) ergeben sich aus der sogleich zu erwähnenden Formentheorie. Gehören h_2, h_3 und H_2, H_3 einem Zahlkörper K an, so definieren die kubischen Gleichungen (1) und (3) denselben Zahlkörper, wenn die Gleichung (5) oder (9) eine Wurzel aus K besitzt.

Der Zusammenhang mit der früheren Untersuchung wird durch Einführung der Diederformen gegeben. Setzt man

$$(11) \qquad \alpha_1 = 2\lambda_1 - \lambda_2, \quad \alpha_2 = -\lambda_1 + 2\lambda_2, \quad \alpha_3 = -\lambda_1 - \lambda_2,$$

so stellen

$$(12) \qquad h_2 = \lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2, \quad h_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - 2\lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)$$

in λ_1 und λ_2 Diederformen dar. Werden für $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3$ entsprechende Größen Λ_1 und Λ_2 eingeführt, so drücken sich q und $q_{(s)}$ durch Formen in kogredienten Variablensystemen aus:

$$(13) \qquad q = [\Lambda_1\lambda_2(2\lambda_1 - \lambda_2) + \Lambda_2\lambda_1(\lambda_1 - 2\lambda_2)] : (\Lambda_1\lambda_2 - \Lambda_2\lambda_1)$$
$$q_{(s)} = 2\Lambda_1\lambda_1 - \Lambda_1\lambda_2 - \Lambda_2\lambda_1 + 2\Lambda_2\lambda_2 .$$

Die Ausdrücke der Dimension Null

$$(14) \qquad q' = q h_2 : h_3, \quad q'_{(s)} = q_{(s)} h_2 H_2 : h_3 H_3$$

sind sodann nur von den Diederhauptmoduln $\lambda_1 : \lambda_2 = \lambda$ und $\Lambda_1 : \Lambda_2 = \Lambda$ abhängig. Desgleichen hängen die durch (5) und (9) gegebenen Gleichungen für q' und $q'_{(s)}$ nur von

$$(15) \qquad h_2^3 : h_3^2 = h \quad \text{und} \quad H_2^3 : H_3^2 = H$$

ab. Die Gleichungen für q' sind in H bzw. Λ linear. Die Ausrechnung nach Λ führt auf eine bereits in der M. Z., (62) und (63) allgemein für die regulären Körper angegebenen Formel. Diese transformiert die Normalgleichung $h(\lambda) = 0$ in $H(\Lambda) = 0$ [2]). Die kubische Gleichung (1), von welcher wir ausgingen, läßt sich vermittels der Substitution $x = h_3 x' : h_2$ auf eine Gleichung reduzieren, die nur einen Parameter enthält, nämlich auf

$$(16) \qquad f_3(x, h) = x^3 - 3xh - 2h = 0.$$

[2]) Diese Formel stellt jedoch keine birationalen Transformationen von $h(\lambda) = 0$ dar. Diese Eigenschaft haben nur die linearen Substitutionen in dem Hauptmodul λ. Wenn schon die Transformationen eindeutig umkehrbar sind, so doch nur unter der allgemeineren Voraussetzung, daß die zu q' inverse Größe $QH_2 : H_3$ [M. Z., (58)] rationale Funktion von q' und h ist.

Vermittels von Funktionenkörpern lassen sich die algebraischen Entwicklungen nunmehr so formulieren. Über dem Körper $K(h, H)$ der rationalen Funktionen von h und H sind die Polynome $f_3(x, h)$ und $f_3(X, H)$ irreduzibel, und die durch sie erzeugten Körper besitzen über $K(h, H)$ keinen gemeinsamen Teilkörper. Desgleichen hat der Körper $K(h, H, q')$ über $K(h, H)$ mit den durch $f_3(x, h) = 0$ und $f_3(X, H) = 0$ definierten Normalkörpern keinen Teilkörper gemeinsam. Denn sobald $K(h, H)$ um die Wurzeln von $f_3(x, h) = 0$ erweitert wird, stellt q' zufolge (14) und (7) eine lineare rationale Funktion der Wurzeln von $f_3(X, H)$ dar, die bei Permutation der Wurzeln nicht in sich übergeht. Daher bleibt die Gleichung sechsten Grades für q' auch nach Adjunktion des durch $f_3(x, h)$ definierten Normalkörpers irreduzibel, so daß dieser mit $K(h, H, q')$ keinen Teilkörper gemeinsam hat. Die zweite Behauptung ist eine unmittelbare Folge der ersten. Denn aus (2) läßt sich eine Tschirnhaustransformation aus $K(h, H, q')$ ableiten, welche $f_3(x, h) = 0$ in $f_3(X, H) = 0$ überführt, so daß über $K(h, H, q')$ beide Polynome ein- und denselben Normalkörper erzeugen.

Die für die Entwicklungen am Dieder verwendete formentheoretische Betrachtungsweise hat bei der Berechnung konkreter Fälle Bedeutung und stellt auch den tiefergehenden Standpunkt dar. Indessen wird in der vorliegenden Abhandlung die allgemeine Aufgabe nur soweit verfolgt, als sie durch die einfachere Körpertheorie der Algebra darstellbar ist.

b) *Formulierung der allgemeinen Aufgabe.*

Über dem Körper $K(h)$ der rationalen Funktionen von h sei

$$f_\nu(x, h) = x^\nu + R_1(h)x^{\nu-1} + \cdots + R_\nu(h) = 0 \tag{17}$$

eine irreduzible Gleichung ν-ten Grades mit den Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ und der Monodromiegruppe $\mathfrak{G}_\mu$ der Ordnung μ. Dies ist die Gruppe der Permutationen, welche die Wurzeln α bei geschlossenen Umläufen von h auf der einfachen Ebene der komplexen Zahlen erfahren können.

Eine zweite Gleichung über dem Körper $K(H)$ mit den Wurzeln $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\nu$, deren Monodromiegruppe aus denselben Permutationen besteht, wie die von $f_\nu = 0$, sei

$$F_\nu(X, H) = 0. \tag{18}$$

Die Spezialisierung $F_\nu = f_\nu(X, H) = 0$ wird erst in Abschn. III vorgenommen.

Der zugrundegelegte Zahlkörper K werde so gewählt, daß die Galoissche Gruppe von f_ν und F_ν mit $\mathfrak{G}_\mu$ identisch ist.

Durch die Lagrangesche Interpolationsformel [3])

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} \mathsf{A}_{p_i} \frac{f_\nu(x)}{(x - \alpha_i) f'_\nu(\alpha_i)} \tag{19}$$

werden die α in die A übergeführt. Da die A einer beliebigen Permutation

$$P = \begin{pmatrix} i \\ p_i \end{pmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, \nu) \tag{20}$$

unterworfen werden können, gibt es $\nu!$ Formeln (19). Die Koeffizienten von (19) sind rationale Funktionen der α und A, definieren also einen in dem Kompositum der Zerfällungskörper $K(h, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ und $K(H, \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\nu)$ enthaltenen Körper. Ein primitives Element dieses Körpers sei q, und der Körper ist mit $K(h, H, q)$ zu bezeichnen, wobei h, H, q durch eine algebraische Beziehung verbunden sind. Primitive Elemente lassen sich auch aus linearen Verbindungen der $\nu - 1$ Ausdrücke

---

[3]) Auf diese Gestalt der Tschirnhaustransformation machte mich Herr E. Bessel-Hagen aufmerksam.

$$\sum_{i=1}^{\nu} \mathsf{A}_{p_i} \alpha_i^{\varepsilon} \qquad (\varepsilon = 1, \ldots, \nu - 1) \tag{21}$$

gewinnen.

Die grundlegende Aufgabe besteht nunmehr darin, alle Körper $K(h, H, q)$ zu ermitteln, welche mit $K(h, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ und $K(H, \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\nu)$ über $K(h, H)$ keinen Teilkörper gemeinsam haben. Über einem solchen Körper bleiben f_ν und F_ν irreduzibel und behalten $\mathfrak{G}_\mu$ als Gruppe. Die Formel (19) liefert über $K(h, H, q)$ eine Tschirnhaustransformation

$$X = R(x, h, H, q)\,, \tag{22}$$

welche $f_\nu(x) = 0$ in $F_\nu(X) = 0$ überführt, und zwar ist nach (19)

$$\mathsf{A}_{p_i} = R(\alpha_i, h, H, q) \qquad (i = 1, \ldots, \nu), \tag{23}$$

so daß A_{p_i} Element aus $K(h, H, q, \alpha_i)$ ist.

Die Formel (19) bzw. die Ausdrücke (21) gehen in sich über, wenn auf die α und A die simultanen Permutationen

$$P' \text{ und } P'' = P^{-1} P' P \tag{24}$$

ausgeübt werden, und zwar bedeutet P' eine beliebige Permutation unter ν Elementen und P die in (20) genannte. Die Wurzeln α bzw. A erfahren indessen in Abhängigkeit von h bzw. H bei deren Umläufen nur die Permutationen von $\mathfrak{G}_\mu$. Wird P' in (24) auf diese Permutationen beschränkt, so durchläuft P'' eine innerhalb der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_\nu$ konjugierte Gruppe

$$\overline{\mathfrak{G}}_\mu = P^{-1} \mathfrak{G}_\mu P \tag{25}$$

und, je nachdem $\mathfrak{G}_\mu$ und $\overline{\mathfrak{G}}_\mu$ Elemente gemeinsam haben, werden die Ausdrücke (21) bzw. q durch simultane Permutationen P' und P'' aus $\mathfrak{G}_\mu$ in sich übergeführt. $\mathfrak{G}_\mu$ und $\overline{\mathfrak{G}}_\mu$ mögen die Untergruppe $\mathfrak{H}_{\mu'}$ der Ordnung μ' gemeinsam haben. Werden auf die A die Permutationen von $\mathfrak{G}_\mu$ ausgeübt, so gehe q in die μ Werte

$$q_1, q_2, \ldots, q_\mu \tag{26}$$

über. Werden unabhängig voneinander auf die α die Permutationen von $\mathfrak{H}_{\mu'}$ und auf die A die Permutationen von $\mathfrak{G}_\mu$ ausgeübt, so werden die μ Werte nur permutiert, so daß das Produkt

$$(y - q_1)(y - q_2) \cdots (y - q_\mu) = \Phi_\mu(y) \tag{27}$$

für alle $\mu\mu'$ Operationen unveränderlich ist. Die Koeffizienten von $\Phi_\mu(y)$ gehören also einem Körper $K(h, H, \beta)$ an, wenn β ein zu $\mathfrak{H}_{\mu'}$ gehöriges Element von $K(h, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ bedeutet. Desgleichen können auf die A die Permutationen von $\mathfrak{H}_{\mu'}$ und auf die α die Permutationen von $\mathfrak{G}_\mu$ ausgeübt werden, und ähnlich wie in (27) läßt sich ein Polynom ableiten, dessen Koeffizienten in einem Körper $K(h, H, \mathsf{B})$ liegen, wenn B ein zu $\mathfrak{H}_{\mu'}$ gehöriges Element von $K(H, \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\nu)$ bedeutet. Für den Fall

$$\mathfrak{H}_{\mu'} = \mathfrak{G}_\mu = \overline{\mathfrak{G}}_\mu \tag{28}$$

wird

$$K(h, H, \beta) = K(h, H, \mathsf{B}) = K(h, H)\,, \tag{29}$$

und q ist Wurzel einer Gleichung

$$\Phi_\mu(y, h, H) = 0 \tag{30}$$

vom Grade μ. Nur dieser Fall kann Lösungen der gestellten Aufgabe enthalten, da der Körper $K(h, H, q)$ über $K(h, H)$ mit $K(h, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ und $K(H, \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\nu)$ keinen Teil-

körper gemeinsam haben soll. Die Bedingung (28) ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Denn nach Adjunktion von $K(h, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ [oder $K(H, \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\nu)$] geht $\Phi_\mu = 0$ in (30) zufolge der Darstellung für q nach (21) in eine Normalgleichung für $K(H, \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\nu)$ [bzw. $K(h, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$] über und bleibt über $K(h, H, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ [bzw. $K(h, H, \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\nu)$] irreduzibel.

c) *Satz über die Körperdiskriminante von* $K(h, H, q)$.

Die Resultate in b) gestatten die Berechnung der Körperdiskriminante von $K(h, H, q)$. Bei konstantem H bzw. konstanten A definiert die Gleichung $\Phi_\mu = 0$ in (30) in h und y zufolge der Darstellung von q in (21) den Galoisschen Funktionenkörper von f_ν, ist also in den Verzweigungspunkten von f_ν regulär verzweigt. Wird das Verzweigungspolynom des Galoisschen Funktionenkörpers von f_ν mit v_{reg} bezeichnet, so ergibt sich als Körperdiskriminante von Φ_μ bei konstantem H der Wert $c\, v_{\text{reg}}(h)$, in welchem c nur von H abhängt. Der Wert von c ergibt sich durch entsprechende Folgerungen bei konstantem h zu $V_{\text{reg}}(H)$, wenn V_{reg} das Verzweigungspolynom des zu F_ν gehörigen Galoisschen Funktionenkörpers bedeutet. Also berechnet sich die Körperdiskriminante von Φ_μ zu

$$D_k = v_{\text{reg}}(h) \cdot V_{\text{reg}}(H)\,. \tag{31}$$

So ergibt sich für die Diedergleichungen (5) und (9)

$$D_k = h^4(h-1)^3 \cdot H^4(H-1)^3\,. \tag{32}$$

Die Theorie der Gleichungen $\Phi_\mu(y, h, H) = 0$ wird in der Weise fortzusetzen sein, daß diese Gleichungen als algebraische Gebilde in zwei unabhängigen Variablen aufgefaßt werden.

Abschnitt II. Beziehungen der algebraischen Aufgabe zur Gruppentheorie.

Die Existenz der zu untersuchenden Körper $K(h, H, q)$ hängt nach (25) und (28) von der Bedingung

$$\mathfrak{G}_\mu = P^{-1}\,\mathfrak{G}_\mu\,P \tag{33}$$

ab. Diese bedeutet einen Isomorphismus von $\mathfrak{G}_\mu$ zu sich selbst mit bestimmter Zuordnungsrichtung, also einen Automorphismus [4]) von $\mathfrak{G}_\mu$ Hiermit ist der Inhalt der Gleichung (33) jedoch nicht erschöpft, da $\mathfrak{G}_\mu$ als transitive Permutationsgruppe ν-ten Grades vorausgesetzt ist und die Permutation P die Eigenschaft hat, diese Permutationsgruppe in sich zu transformieren. Es ist also die Bedingung zu untersuchen, unter der bei gegebener transitiver Permutationsgruppe ν-ten Grades von $\mathfrak{G}_\mu$ ein Automorphismus von $\mathfrak{G}_\mu$ durch eine Permutation von ν Elementen erzeugt werden kann.

Jede Darstellung von $\mathfrak{G}_\mu$ als transitive Permutationsgruppe wird durch eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_\mu$ vermittelt [5]). Sei $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe vom Index ν, die keinen Normalteiler von $\mathfrak{G}_\mu$ enthält, so sind die Elemente der Permutationen durch die ν Nebenklassen $\mathfrak{H}S_i (i = 1, \ldots, \nu)$ gegeben, und es ist

$$P_k = \begin{pmatrix} \mathfrak{H}S_i \\ \mathfrak{H}S_i\,T_k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, \nu \\ k = 1, \ldots, \mu \end{pmatrix} \tag{34}$$

eine dem Element T_k von $\mathfrak{G}_\mu$ entsprechende Permutation. Die Erzeugung der Monodromiegruppe von f_ν (bzw. F_ν) wird durch die Untergruppe der Automorphismen von $K(h, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ bzgl. $K(h, \alpha)$ vermittelt.

---

[4]) Hasse, Höhere Algebra II; Sammlung Göschen 1927, 93. Speiser, Th. d. Gruppen endl. Ord.; J. Springer 1927, Kap. 9, 121.

[5]) Speiser, loc. cit. 113.

a) *Die Permutationen* $P_{(\nu)}$.

Die Gruppe $\mathfrak{G}_\mu$ sei vermittels $\mathfrak{H}$ durch Permutationen nach (34) dargestellt. Erzeugen die Permutationen P und P_* von ν Elementen denselben Automorphismus von $\mathfrak{G}_\mu$, so transformiert die Permutation $P_* P^{-1}$ jede Permutation von $\mathfrak{G}_\mu$ in sich. Die Permutationen $P_* P^{-1}$ seien mit $P_{(\nu)}$ bezeichnet, da sie mit jeder Permutation von $\mathfrak{G}_\mu$ vertauschbar sind.

Wird eine Permutation P_k in (34) durch $P_{(\nu)}$ transformiert, so bleiben also die Ersetzungen von P_k erhalten. Wenn $\mathfrak{H}S_{i_1}$ durch $P_{(\nu)}$ in $\mathfrak{H}S_{i_2}$ übergeht, so wird $\mathfrak{H}S_{i_1}T_k$ für alle T_k in $\mathfrak{H}S_{i_1}T_k$ übergehen, und $P_{(\nu)}$ stellt sich durch

$$P_{(\nu)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{H}S_{i_1}T_k \\ \mathfrak{H}S_{i_2}T_k \end{pmatrix} \qquad (k = 1, \ldots, \mu) \tag{35}$$

dar. Durch (35) ist aber nur dann eine Permutation gegeben, wenn für jedes Element nur eine Ersetzungsregel geliefert wird. Im besonderen muß, wenn T_k die zu $\mathfrak{H}S_{i_1}$ inverse Nebenklasse durchläuft, $\mathfrak{H}S_{i_2}T_k$ ein- und dieselbe Nebenklasse ergeben, die mit $\mathfrak{H}S_{i_0}$ bezeichnet sei. Also besteht

$$(\mathfrak{H}S_{i_0}) \cdot (\mathfrak{H}S_{i_1}) = \mathfrak{H}S_{i_2}, \tag{36}$$

und S_{i_0} ist mit $\mathfrak{H}$ vertauschbar. Diese Bedingung ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Denn sobald S_{i_0} mit $\mathfrak{H}$ vertauschbar ist, liefert $(\mathfrak{H}S_{i_0}) \cdot (\mathfrak{H}S_i)$ für jedes i eine eindeutig definierte Nebenklasse $\mathfrak{H}S_{i_0}S_i$, und die Permutation

$$P_{(\nu)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{H}S_i \\ \mathfrak{H}S_{i_0}S_i \end{pmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, \nu) \tag{37}$$

ist mit allen P_k in (34) vertauschbar; denn es gilt

$$P_{(\nu)}P_k = P_k P_{(\nu)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{H}S_i \\ \mathfrak{H}S_{i_0}S_i T_k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, \nu \\ k = 1, \ldots, \mu \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Die Eigenschaft von S_{i_0}, mit $\mathfrak{H}$ vertauschbar zu sein, ist algebraisch dahin zu deuten, daß f_ν bzw. F_ν eine entsprechende Tschirnhaustransformation in sich besitzt. Denn aus

$$\overline{\mathfrak{H}} = S_{i_0}^{-1} \cdot \mathfrak{H}S_{i_0} = \mathfrak{H} \tag{39}$$

folgt, daß die zu $\mathfrak{H}$ und $\overline{\mathfrak{H}}$ gehörigen Wurzeln von f_ν (bzw. F_ν) denselben Körper erzeugen, und die Permutation $P_{(\nu)}$ in (37) liefert die Ersetzungen, welche die α (bzw. A) bei der Transformation von f_ν (bzw. F_ν) in sich erfahren. Der Gruppe $\mathfrak{G}_\mu$ gehört jedoch $P_{(\nu)}$ zufolge (34) und (37) nur dann an, wenn S_{i_0} mit allen S_i, also mit allen T_k vertauschbar ist.

Erzeugt die Permutation P einen Automorphismus von $\mathfrak{G}_\mu$, so erzeugen auch die Permutationen PP_k einen Automorphismus von $\mathfrak{G}_\mu$. Innerhalb der Gruppe der Automorphismen von $\mathfrak{G}_\mu$ bilden diese Automorphismen eine Nebenklasse zur Gruppe der „inneren" Automorphismen von $\mathfrak{G}_\mu$. Die Automorphismen einer solchen Nebenklasse entsprechen aber den bzgl. $K(h, H)$ zu $K(h, H, q)$ konjugierten Körpern, weshalb die Automorphismen innerhalb dieser Untersuchung als konjugiert bezeichnet werden [hierzu Absatz c), (54)].

Die Gesamtheit aller P von der Eigenschaft $P\mathfrak{G}_\mu = \mathfrak{G}_\mu P$ bilden eine Gruppe, von welcher $\mathfrak{G}_\mu$ Normalteiler ist. Hat die Gruppe die Ordnung $\mu\sigma$, so gibt es

$$\mu\sigma : \varrho \tag{40}$$

Automorphismen, die durch Permutationen von ν Elementen erzeugt werden, wenn ϱ die Anzahl der Permutationen $P_{(\nu)}$ ist. Von diesen Automorphismen sind je $\mu : \varphi$ konjugiert, wenn φ die Anzahl der Permutationen $P_{(\nu)}$ aus $\mathfrak{G}_\mu$ bedeutet. Somit ist die Anzahl der Klassen konjugierter Automorphismen, die durch Permutationen von ν Elementen erzeugt werden,

$$\sigma\varphi : \varrho\,. \tag{41}$$

b) *Satz über Erzeugung der Automorphismen von Gruppen durch Permutationen.*

Ist $\mathfrak{G}_\mu$ vermittels $\mathfrak{H}$ als Permutationsgruppe ν-ten Grades dargestellt, so ist die Bedingung zu suchen, unter der ein Automorphismus von $\mathfrak{G}_\mu$ durch eine Permutation von ν Elementen erzeugt werden kann. Der Automorphismus sei durch

$$T_\varepsilon \to T_\eta \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon = 1, \ldots, \mu \\ \eta = \eta_1, \ldots, \eta_\mu \end{pmatrix} \tag{42}$$

gegeben. Zwei durch den Automorphismus zugeordnete Permutationen

$$P_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} S_i \\ \mathfrak{H} S_i T_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad P_\eta = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} S_i \\ \mathfrak{H} S_i T_\eta \end{pmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, \nu) \tag{43}$$

werden mit einer beliebigen Permutation

$$P = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} S_i \\ \mathfrak{H} S_{p_i} \end{pmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, \nu) \tag{44}$$

zu

$$PP_\eta = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} S_i \\ \mathfrak{H} S_{p_i} T_\eta \end{pmatrix} \text{ und } P_\varepsilon P = (P^{-1} P_\varepsilon^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} S_i T_\varepsilon^{-1} \\ \mathfrak{H} S_{p_i} \end{pmatrix} \quad (i = 1, \ldots, \nu) \tag{45}$$

zusammengesetzt. Soll P den vorgegebenen Automorphismus erzeugen, so ist $P_\varepsilon P = PP_\eta$. Die Untergruppe $\mathfrak{H}$ werde durch den Automorphismus in die isomorphe Gruppe $\mathfrak{H}'$ übergeführt. Diese ergibt sich aus (45) folgendermaßen. Wird $S_i = E$ und durchläuft T_s alle Elemente von $\mathfrak{H}$, so sind die Elemente, welche T_η durchläuft, durch

$$\mathfrak{H} S_{p_i} T_\eta = \mathfrak{H} S_{p_i} \tag{46}$$

gegeben. Daraus folgt

$$\mathfrak{H}' = S_{p_i}^{-1} \mathfrak{H} S_{p_i} = \bar{\mathfrak{H}}, \tag{47}$$

und die Klasse der zu $\mathfrak{H}$ konjugierten Untergruppen ist bzgl. des Automorphismus invariant. Diese Bedingung ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Die Bedingung kann durch entsprechende Auswahl eines konjugierten Automorphismus zu $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$ spezialisiert werden, und

$$P = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} T_\varepsilon \\ \mathfrak{H} T_\eta \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon = 1, \ldots, \mu) \tag{48}$$

liefert eine Permutation von ν Elementen, da jede Nebenklasse $\mathfrak{H}T_\varepsilon$ wiederum in eine Nebenklasse $\mathfrak{H}T_\eta$ übergeht, so daß jede Ersetzung $(\mu\colon \nu)$-fach aufgeführt ist. Sodann wird die in derselben Weise dargestellte Permutation P_{ε_0} aus $\mathfrak{G}_\mu$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{H} T_\varepsilon \\ \mathfrak{H} T_\varepsilon T_{\varepsilon_0} \end{pmatrix} \text{ durch } P \text{ in } \begin{pmatrix} \mathfrak{H} T_\eta \\ \mathfrak{H} T_\eta T_{\eta_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} T_\varepsilon \\ \mathfrak{H} T_\varepsilon T_{\eta_0} \end{pmatrix} = P_{\eta_0} \quad (\varepsilon = 1, \ldots, \mu) \tag{49}$$

transformiert, und P erzeugt den vorgegebenen Automorphismus. Hieraus ergibt sich der Satz:

Ist die Permutationsgruppe $\mathfrak{G}_\mu$ ν-ten Grades durch die Untergruppe $\mathfrak{H}$ erzeugt, so sind die und nur die Automorphismen von $\mathfrak{G}_\mu$ durch Permutationen von ν Elementen erzeugbar, welche die Klasse der zu $\mathfrak{H}$ konjugierten Untergruppen in sich überführen.

Gibt es einen Automorphismus von $\mathfrak{G}_\mu$, der die Klasse der zu $\mathfrak{H}$ konjugierten Untergruppen in eine andere Klasse überführt, so werden alle Automorphismen dieser Art erhalten, wenn die durch Permutationen erzeugten Automorphismen mit diesem zusammengesetzt werden. Wird die Klasse von $\mathfrak{H}$ durch Anwendung aller Automorphismen von $\mathfrak{G}_\mu$ in ψ verschiedene Klassen übergeführt, so ist die Anzahl aller Klassen konjugierter Automorphismen von $\mathfrak{G}_\mu$ nach (41)

$$\sigma \varphi \psi \colon \varrho\,. \tag{50}$$

c) *Die Galoissche Gruppe der Gleichung $\Phi_\mu(q, h, H) = 0$.*

Das Kompositum der Normalkörper $K(h, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ und $K(H, \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\nu)$ ergibt einen Normalkörper vom Grade μ^2. Die μ^2 Operationen, welche sich ergeben, wenn die Permutationen von $\mathfrak{G}_\mu$ auf die α und A unabhängig voneinander ausgeübt werden, stellen die Gruppe $\mathfrak{G}_\mu \times \mathfrak{G}_\mu$ dieses Normalkörpers dar und können durch Elementepaare

$$t_i, T_k \qquad (i, k = 1, \ldots, \mu) \tag{51}$$

bezeichnet werden, wobei gleichen Indizes gleiche Permutationen entsprechen sollen. Ferner soll $q t_i T_k$ dasjenige bzgl. $K(h, H)$ zu q konjugierte Element bezeichnen, das hervorgeht, wenn auf die α die Permutation P_i von $\mathfrak{G}_\mu$ und auf die A die Permutation P_k von $\mathfrak{G}_\mu$ ausgeübt wird. Zudem sei das konjugierte Element q_i durch

$$q_i = q T_i \tag{52}$$

festgelegt. Bedeutet die Zuordnung $t_\varepsilon \to T_\eta (\varepsilon = 1, \ldots, \mu)$ den nach (33) zu $K(h, H, q)$ gehörigen Automorphismus von $\mathfrak{G}_\mu$, so sind die Automorphismen von

$$K(h, H, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\nu) \quad \text{bzgl.} \quad K(h, H, q)$$

durch

$$q t_\varepsilon T_\eta = q \qquad (\varepsilon = 1, \ldots, \mu) \tag{53}$$

gegeben. Aus (53) folgt

$$q_i t_\varepsilon (T_i^{-1} T_\eta T_i) = q_i \qquad (i, \varepsilon = 1, \ldots, \mu), \tag{54}$$

und es sind die zu $t_\varepsilon \to T_\eta$ konjugierten Automorphismen von $\mathfrak{G}_\mu$ und die bzgl. $K(h, H)$ konjugierten Körper $K(h, H, q_i)$ eineindeutig einander zugeordnet. Aus (53) berechnet sich die allgemeine Gleichung

$$q_i t_\varepsilon T_\delta = q T_\eta^{-1} T_i T_\delta \qquad (i, \delta, \varepsilon = 1, \ldots, \mu), \tag{55}$$

und aus dieser folgt, daß die Galoissche Gruppe von $\Phi_\mu(q)$ durch Permutationen aus den μ Elementen von $\mathfrak{G}_\mu$

$$\begin{pmatrix} T_i \\ T_\gamma T_i T_\delta \end{pmatrix} \qquad (\gamma, \delta, i = 1, \ldots, \mu) \tag{56}$$

darstellbar ist. Die zu q gehörige Untergruppe ist sodann nach (53) und (55) $(\delta = \eta)$ durch die Permutationen

$$\begin{pmatrix} T_i \\ T_\eta^{-1} T_i T_\eta \end{pmatrix} \qquad (i, \eta = 1, \ldots, \mu) \tag{57}$$

gegeben und hat die Ordnung $\mu : \varphi$, wenn φ wie zuvor die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{G}_\mu$ ist, welche mit jedem Element von $\mathfrak{G}_\mu$ vertauschbar sind. Diese Elemente seien im folgenden durch die Bezeichnung $T_{(v)}$ hervorgehoben. Die μ zu (57) konjugierten Gruppen sind durch (58)

$$\begin{pmatrix} T_i \\ T_\eta^{-1} T_i T^{-1} T_\eta T \end{pmatrix} \qquad (i, \eta = 1, \ldots, \mu) \tag{58}$$

gegeben, wenn T alle Elemente von $\mathfrak{G}_\mu$ durchläuft. Nur wenn $T^{-1} T_\eta T = T_\eta (\eta = 1, \ldots, \mu)$ ist, werden (57) und (58) einander gleich, wenn also $T = T_{(v)}$ ist. Daher besitzt $\Phi_\mu(q)$ nur φ den Elementen $T_{(v)}$ entsprechende Tschirnhaustransformationen in sich.

Die Ordnung der Gruppe (56) ist $\mu^2 : \varphi$, und nur in dem Falle $\varphi = 1$ wird das Kompositum aus $K(h, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ und $K(H, \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\nu)$ Normalkörper von Φ_μ. Ist $f_\nu = 0$ bzw. $F_\nu = 0$ eine Abelsche Gleichung ($\varphi = \nu = \mu$), so wird auch $\Phi_\mu = 0$ eine Abelsche Gleichung derselben Gruppe [6]).

[6]) Allgemeiner: Die Galoissche Gruppe von $K(h, H, q)$ hat dasselbe Zentrum wie $\mathfrak{G}_\mu$.

d) *Die Gruppe* $\mathfrak{G}_{\mu\varrho:\varphi}$.

Wird die Gruppe $\mathfrak{G}_\mu$ der Permutationen P_k in (34) durch die Permutationen $P_{(v)}$ von (37) erweitert, so wird eine Gruppe $\mathfrak{G}_{\mu\varrho:\varphi}$ von der Ordnung $\mu\varrho:\varphi$ erhalten. Jede Permutation P, die einen Automorphismus von $\mathfrak{G}_\mu$ erzeugt, liefert auch für die erweiterte Gruppe einen solchen, da die einer Permutation $P_{(v)}$ zugeordnete Permutation $P^{-1}P_{(v)}P$ ebenfalls mit allen P_k vertauschbar ist. Es ist nämlich

$$(59)\quad P_k(P^{-1}P_{(v)}P) = P^{-1}(PP_kP^{-1})P_{(v)}P = P^{-1}P_{(v)}(PP_kP^{-1})P = (P^{-1}P_{(v)}P)P_k.$$

Somit geht q nach (24) in sich über, wenn auf die α und A die Permutationen

$$(60)\qquad P_{(v)} \text{ und } P'_{(v)} = P^{-1}P_{(v)}P$$

aus $\mathfrak{G}_{\mu\varrho:\varphi}$ ausgeübt werden.

Die Permutationen $P_{(v)}$ und $P'_{(v)}$ seien als Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}_{\mu\varrho:\varphi}$ mit $U_{(v)}$ und $U'_{(v)}$ bezeichnet. Das Resultat (60) wird sodann symbolisch entsprechend (53) durch

$$(61)\qquad q\,u_{(v)}U'_{(v)} = q$$

gegeben. Zufolge der Vertauschbarkeit von $U_{(v)}$ mit T_i gilt (61) auch für alle konjugierten Werte q_i, und es ist

$$(62)\qquad q_i u_{(v)} = q_i(U'_{(v)})^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, \mu).$$

Weiterhin folgt aus der Vertauschbarkeit von $U_{(v)}$ mit T_i und (53), daß

$$(63)\qquad (qU_{(v)})t_\varepsilon T_\eta = qt_\varepsilon T_\eta U_{(v)} = qU_{(v)},$$

also $qU_{(v)}$ ein Element des Körpers $K(h, H, q)$ ist. Im Falle $U_{(v)} = T_{(v)}$ werden die φ Transformationen von $\Phi_\mu = 0$ in sich erhalten.

e) *Anzahl der Lösungen der algebraischen Aufgabe.*

Aus den gewonnenen Ergebnissen läßt sich unmittelbar die Anzahl der Lösungen der algebraischen Aufgabe angeben. Die Tschirnhaustransformationen, welche f_ν in F_ν überführen, und die Permutationen P von der Eigenschaft $P\mathfrak{G}_\mu = \mathfrak{G}_\mu P$ sind eineindeutig einander zugeordnet. Andrerseits sind die verschiedenen Körper $K(h, H, q)$ und die durch Permutationen von ν Elementen erzeugbaren Automorphismen von $\mathfrak{G}_\mu$ eineindeutig einander zugeordnet, und es gibt so viele Transformationen über demselben Körper $K(h, H, q)$ als Permutationen $P_{(v)}$ vorhanden sind. Es sind dies die Transformationen, welche sich durch Zusammensetzung mit den Transformationen von f_ν bzw. F_ν in sich ergeben. Diese sind als nicht wesentlich verschiedene Lösungen der Aufgabe anzusehen, desgleichen die bzgl. $K(h, H)$ konjugierten Transformationen. Die wesentlich verschiedenen Lösungen der Aufgabe sind daher durch die Klassen konjugierter Körper $K(h, H, q)$ vertreten, und deren Anzahl ist gleich der Anzahl der Klassen konjugierter durch Permutationen von ν Elementen erzeugten Automorphismen, also nach (41) durch $\sigma\varphi:\varrho$ gegeben.

Die Anzahl aller Klassen konjugierter Automorphismen von $\mathfrak{G}_\mu$ ist aber nach (50) das ψ-fache, wo ψ die Anzahl der Klassen konjugierter Untergruppen bezeichnet, in die $\mathfrak{H}$ durch Automorphismen von $\mathfrak{G}_\mu$ transformiert wird. Die algebraische Bedeutung dieser Automorphismen wird folgendermaßen erkannt. Seien f_μ und F_μ Galoissche Polynome von f_ν und F_ν, so ist für diese $\psi = 1$, und jeder Klasse konjugierter Automorphismen entspricht eine Lösung der Aufgabe. Eine Wurzel von f_μ bzw. F_μ sei mit γ bzw. Γ bezeichnet. Der dem Element T_i von $\mathfrak{G}_\mu$ entsprechende Automorphismus von $K(h, \gamma)$ bzw. $K(H, \Gamma)$ führe γ bzw. Γ in γ_i bzw. Γ_i über. Zu jedem Automorphismus $T_\varepsilon \to T_\eta$ von $\mathfrak{G}_\mu$ gibt es sodann über dem zugeordneten Körper $K(h, H, q)$ eine Transformation

$$(64)\qquad \Gamma_\eta = R(\gamma_\varepsilon, h, H, q) \qquad (\varepsilon = 1, \ldots, \mu)$$

von $f_\mu = 0$ in $F_\mu = 0$ [vgl. (23) und (48), $\mathfrak{H} = E$]. Führt nunmehr der Automorphismus von $\mathfrak{G}_\mu$ die Untergruppe $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}'$ über, so läßt sich ein zu $\mathfrak{H}'$ gehöriges Element A' vermöge (64) als Element aus $K(h, H, q, \alpha)$ darstellen. Die einzelnen den ψ Klassen zugeordneten Elemente A', zu denen auch A gehört, seien gegeben durch

$$F_\nu(X, H) = 0, \quad F_{\nu,2}(X, H) = 0, \ldots, F_{\nu,\psi}(X, H) = 0. \tag{65}$$

Die umfassende Aufgabe für $f_\mu = 0$ und $F_\mu = 0$ wird sodann durch die Gleichungen (65) in die ψ Teilaufgaben zerlegt, $f_\nu = 0$ in diese zu transformieren. Die Gleichungen (65) definieren denselben Galoisschen Körper und sind in denselben Punkten verzweigt. Ihre Monodromiegruppen lassen sich notwendig durch dieselben Permutationen darstellen. Für jede Gleichung werden aber die Permutationen aus der Verzweigung in anderer Weise erzeugt. Werden diejenigen Permutationen einander zugeordnet, welche die Wurzeln bei gleichen Umläufen von H auf der einfachen Ebene erfahren, so ergeben sich Automorphismen von $\mathfrak{G}_\mu$, die durch Permutationen von ν Elementen nicht erzeugt werden können. Zu bemerken ist, daß Art der Verzweigung und Geschlecht der Gleichungen (65) durchaus voneinander verschieden sein können [7]).

Abschnitt III. Der Fall $F_\nu = f_\nu$.

Die Anwendungen auf die Reduktions- und Transformationstheorie der algebraischen Funktionen beziehen sich auf den Fall $F_\nu = f_\nu(X, H)$. Diese Spezialisierung bietet im wesentlichen zwei Aufgaben dar, erstens, die Eigenschaften der Gleichung $\Phi_\mu(q, h, H) = 0$ bei Koinzidenz der Parameterwerte h und H zu untersuchen, zweitens, die Bedingungen aufzufinden, unter denen $\Phi_\mu = 0$ in eine in h und H symmetrische Gleichung transformiert werden kann.

a) *Koinzidenz von h und H.*

Ist $F_\nu = f_\nu$, so hat die Koinzidenz $H = h$ die ν Koinzidenzen

$$\mathsf{A}_i = \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, \nu) \tag{66}$$

zur Folge. Die Wurzeln von

$$\Phi_\mu(q, h, h) = 0 \tag{67}$$

sind zufolge (66) Elemente des Körpers $K(h, \alpha, \ldots, \alpha_\nu)$. Die zur Wurzel q_k bzgl. $K(h)$ konjugierten Wurzeln werden erhalten, wenn in q_k auf die nunmehr einander gleichen A und α die μ Permutationen von $\mathfrak{G}_\mu$ ausgeübt werden. Die zu q_k konjugierten Wurzeln sind somit nach (55) ($\delta = \varepsilon$) durch

$$q_k t_\varepsilon T_\varepsilon = q T_\eta^{-1} T_k T_\varepsilon \qquad (\varepsilon = 1, \ldots, \mu) \tag{68}$$

gegeben. Dieses Resultat erhält erst durch Einführung der dem Körper $K(h, H, q)$ nach (33) zugeordneten Nebenklasse $P\mathfrak{G}_\mu = \mathfrak{G}_\mu P$ eine einfache Deutung. Ein der Permutation P entsprechendes Element sei U. Sodann gilt

$$T_\eta = U^{-1} T_\varepsilon U \text{ oder } T_\eta^{-1} = U^{-1} T_\varepsilon^{-1} U \qquad (\varepsilon = 1, \ldots, \mu), \tag{69}$$

und die rechte Seite von (68) läßt die Umformung

$$(q U^{-1})\, T_\varepsilon^{-1} (U T_k)\, T_\varepsilon \qquad (\varepsilon = 1, \ldots, \mu) \tag{70}$$

zu. Indem aber das einzelne Element UT_k mit allen Elementen von $\mathfrak{G}_\mu$ transformiert wird, erhält man eine Zerlegung der Nebenklasse $U\mathfrak{G}_\mu$ in Klassen konjugierter Elemente [8]),

[7]) Diese Verhältnisse lassen sich an der symmetrischen Gruppe von sechs Elementen gut studieren. Unter den symmetrischen Gruppen von n Elementen zeigt diese Gruppe die Besonderheit, eine Klasse äußerer Automorphismen zu besitzen.

[8]) Zufolge $T_k U = T_k(U T_k) T_k^{-1} = U^{-1}(U T_k) U$ bleibt die Klasseneinteilung ungeändert, wenn außer den Elementen von $\mathfrak{G}_\mu$ auch die von $U\mathfrak{G}_\mu$ als transformierende Elemente zugelassen werden.

und diese Klassen entsprechen eineindeutig den Faktoren, in die $\Phi_\mu(q, h, h)$ über $K(h)$ zerfällt. Die der Wurzel q_k zugehörige Untergruppe von $\mathfrak{G}_\mu$ setzt sich aus denjenigen Elementen zusammen, welche das Element UT_k in sich transformieren.

Für das Beispiel des Dieders zerfällt die Gleichung (5) bei $H_3 = H_2 = h_3 = h_2 = h$ in die Gleichungen

$$q = \infty, \quad 3(q+1)^2 - (h-1) = 0, \quad 2q^3 + 3q^2 h - h^2 = 0\,. \tag{71}$$

Diese verteilen sich entsprechend auf die Klassen der Elemente der Ordnung 1, 3, 2.

b) *Fall der Symmetrie in h und H.*

Ist $F_\nu = f_\nu$, so wird q durch Vertauschung der α mit den entsprechenden A in eine Größe Q übergeführt, die der Gleichung

$$\Phi_\mu(Q, H, h) = 0 \tag{72}$$

genügt. Dieser Gleichung ist der zu

$$T_\varepsilon \to T_\eta \text{ inverse Automorphismus } T_\eta \to T_\varepsilon \tag{73}$$

von $\mathfrak{G}_\mu$ zugeordnet, und es ist entsprechend (53)

$$Q t_\eta T_\varepsilon = Q \qquad (\eta = 1, \ldots, \mu). \tag{74}$$

Bei Vertauschung der α und A geht allgemeiner $q T_\eta$ in $Q t_\eta = Q T_\varepsilon^{-1}$ und $Q T_\varepsilon$ in $q t_\varepsilon = q T_\eta^{-1}$ über. Bei Einführung des Elementes U in (69) lassen sich (53) und (74) so schreiben:

$$q t_i (U^{-1} T_i U) = q, \quad Q t_i (U T_i U^{-1}) = Q \qquad (i = 1, \ldots, \mu). \tag{75}$$

Ferner wird bei Vertauschung der α und A

$$q_i \text{ in } Q(U T_i^{-1} U^{-1}) \text{ und } Q_i \text{ in } q(U^{-1} T_i^{-1} U) \qquad (i = 1, \ldots, \mu) \tag{76}$$

übergeführt.

Soll nunmehr $\Phi_\mu = 0$ in eine in h und H symmetrische Gleichung transformierbar sein, so ist zunächst notwendig, das Q einem zu $K(h, H, q)$ bzgl. $K(h, H)$ konjugierten Körper angehört. Also sind die zueinander inversen Automorphismen (73) konjugiert, und dies liefert die Bedingung

$$U = T_{k_0} U_{(v)} U^{-1} \text{ oder } U^2 = T_{k_0} U_{(v)}\,. \tag{77}$$

Die Elemente T_{k_0} und $U_{(v)}$ sind φ-deutig bestimmt, indem für diese auch

$$T_{k_0'} = T_{k_0} T_{(v)} \text{ bzw. } U_{(v)}^* = T_{(v)}^{-1} U_{(v)} \tag{78}$$

gesetzt werden kann. Durch Einsetzen von (77) in die zweite Gleichung von (75) bestätigt man leicht, daß Q_{k_0} ein Element von $K(h, H, q)$ ist, und die rationale Funktion

$$Q_{k_0} = R(q, h, H) \tag{79}$$

transformiert

$$\Phi_\mu(q, h, H) = 0 \quad \text{in} \quad \Phi_\mu(Q, H, h) = 0\,. \tag{80}$$

Durch Vertauschung der α und A geht (79) in

$$q U^{-1} T_{k_0}^{-1} U = R(Q, H, h) \tag{81}$$

über. Die konjugierte Gleichung, welche auf der rechten Seite Q_{k_0} enthält, lautet

$$q U^{-1} T_{k_0}^{-1} U T_{k_0} = R(Q_{k_0}, H, h)\,. \tag{82}$$

Die Zusammensetzung von (79) und (82) ergibt eine Transformation von $\Phi_\mu = 0$ in sich. Daher ist $U^{-1} T_{k_0}^{-1} U T_{k_0}$ ein Element $T_{(v)}$. Nach (77) erhält man

$$U^{-1} T_{k_0}^{-1} U T_{k_0} = U^{-1} U_{(v)} U U_{(v)}^{-1} = U'_{(v)} U_{(v)}^{-1}\,, \tag{83}$$

und $U'_{(v)} U_{(v)}^{-1}$ wird als ein Element $T_{(v)}$ erkannt. Unter der Bedingung

$$U^{-1} T_{k_0}^{-1} U T_{k_0} = E \text{ oder } U T_{k_0} = T_{k_0} U \tag{84}$$

werden die Transformationen (79) und (82) zueinander invers. Zudem gehen (79) und (82) ineinander über, wenn mit h und H auch q und Q_{k_0} vertauscht werden. Daher liefert der in q und Q_{k_0} symmetrische Ausdruck

$$q_{(s)} = q + Q_{k_0} \tag{85}$$

eine Transformation, welche $\Phi_\mu = 0$ in eine in h und H symmetrische Gleichung

$$\Psi_\mu(q_{(s)}, h + H, hH) = 0 \tag{86}$$

überführt.

Die Bedingung (84), die zusammen mit (77) für die Auffindung einer in h und H symmetrischen Gleichung als hinreichend erkannt wurde, ist aber auch für einen der φ in (78) angegebenen Werte von T_{k_0} notwendig. Sei $q'_{(s)}$ ein primitives Element von $K(h, H, q)$, das durch eine in h und H symmetrische Gleichung definiert ist, so geht dies bei der Vertauschung der α und A in ein bzgl. $K(h, H)$ konjugiertes Element über, etwa $q'_{(s)} T_{k_0}^{-1}$. Die Ausübung der T_{k_0} entsprechenden Permutation auf die A führt auf $q'_{(s)}$ zurück, so daß die Zusammensetzung der beiden Operationen eine solche liefert, die $q'_{(s)}$ in sich überführt. Die Wiederholung dieser Operation ergibt aber

$$q'_{(s)} t_{k_0} T_{k_0} = q'_{(s)}, \tag{87}$$

indem die Vertauschung der α und A rückgängig gemacht wird. Gleichung (87) bedeutet einen Automorphismus bzgl. $K(h, H, q)$. Zufolge (75) ergibt sich daraus die Bedingung (84).

Das Element $q_{(s)}$ definiert über $K(h + H, hH)$ einen Körper, der für die Anwendungen von Bedeutung ist und daher als Bikörper von f_ν bezeichnet wird. Bezüglich $K(h + H, hH, q_{(s)})$ besitzt der Normalkörper $K(h, H, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\nu)$ eine Automorphismengruppe der Ordnung 2μ, so daß jedem Bikörper eine Gruppe der Ordnung 2μ zugeordnet ist. Diese Gruppe geht hervor, wenn die Automorphismengruppe bzgl. $K(h, H, q)$ durch die oberhalb (87) genannte Operation, welche $q_{(s)}$ in sich überführt, erweitert wird. Ist V ein der Operation entsprechendes Element, so gilt nach (87)

$$V^2 = T_{k_0}, \tag{88}$$

und die Gruppe ist durch

$$\mathfrak{G}_{2\mu} = \mathfrak{G}_\mu + V\mathfrak{G}_\mu \tag{89}$$

gegeben. $\mathfrak{G}_\mu$ ist notwendig Normalteiler von $\mathfrak{G}_{2\mu}$. Das Element V ist von U verschieden, wenn in (77) $U_{(v)} \neq E$ oder U gleich einem Element von $\mathfrak{G}_\mu$ ist.

Was die Anzahl der Bikörper von f_ν betrifft, die aus demselben Körper $K(h, H, q)$ ableitbar sind, so ist zunächst zu bemerken, daß jede rationale Funktion von q, Q_{k_0}, h, H, die bei Vertauschung von q und h mit Q_{k_0} und H in sich übergeht, ein Element desselben durch $q_{(s)}$ in (85) gegebenen Bikörpers liefert, da bzgl. dieser Funktion sich dieselben Automorphismen ergeben. Andere Körper können sich ergeben, wenn nach (78) $T_{k'_0} = T_{k_0} T_{(v)}$ an Stelle von T_{k_0} gesetzt wird. Sodann muß zunächst $T_{k'_0}$ ebenso wie T_{k_0} mit U, also $T_{(v)}$ mit U vertauschbar sein. Wie oben wird ein Element V' mit entsprechenden Eigenschaften (88) und (89) definiert. Die aus T_{k_0} und $T_{k'_0}$ abgeleiteten Bikörper sind nur dann voneinander verschieden, wenn V' sich nicht unter den Elementen von $V\mathfrak{G}_\mu$ in (89) befindet.

c) *Die Galoissche Gruppe des Bikörpers.*

Bei Vertauschung der α und A erfahren die zu $q_{(s)}$ bzgl. $K(h, H)$ konjugierten Elemente

$$q_{(s)} T_i = q T_i + Q T_{k_0} T_i \qquad (i = 1, \ldots, \mu) \tag{90}$$

eine Permutation. Die rechte Seite wird bei Vertauschung der α und A nach (76) zunächst in

(91) $$Q\,U\,T_i^{-1}\,U^{-1} + q\,U^{-1}\,T_i^{-1}\,T_{k_0}^{-1}\,U \qquad (i = 1, \ldots, \mu)$$

übergeführt. Vermöge der bei Symmetrie geltenden Bedingungen (77) und (84) gewinnt man sodann die Umformung

(92) $$[Q_{k_0} + q]\,U^{-1}\,T_i^{-1}\,U\,T_{k_0}^{-1} = q_{(s)}U^{-1}\,T_i^{-1}\,U\,T_{k_0}^{-1} \quad (i = 1, \ldots, \mu).$$

Die durch die Permutationen (56) gegebene Galoissche Gruppe von $K(h, H, q)$ ist daher mit

(93) $$\begin{pmatrix} T_i \\ U^{-1}\,T_i^{-1}\,U\,T_{k_0} \end{pmatrix} \text{ oder auch mit } \begin{pmatrix} T_i \\ U^{-1}\,T_i^{-1}\,U \end{pmatrix} \quad (i = 1, \ldots, \mu)$$

zu erweitern, damit die Galoissche Gruppe des Bikörpers hervorgeht. Da die zweite Permutation in (93) von T_{k_0} unabhängig ist, hat jeder aus demselben Körper $K(h, H, q)$ abgeleitete Bikörper dieselbe Galoissche Gruppe. Die Ordnung der Gruppe beträgt das Doppelte der von $K(h, H, q)$, also $2\mu^2 : \varphi$, wenn die Permutationen (93) sich nicht schon in der Gruppe von $K(h, H, q)$ befinden.

Erweiterung durch (93) findet nicht statt, wenn $U\mathfrak{G}_\mu$ ein Element enthält, das jedes Element von $\mathfrak{G}_\mu$ in das inverse transformiert. Einen Automorphismus, der jedes Element der Gruppe in das inverse überführt, gestatten bekanntlich nur die Abelschen Gruppen. Der Beweis werde in Kürze gegeben. Die Permutation

(94) $$P = \begin{pmatrix} T_\varepsilon \\ T_\varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon = 1, \ldots, \mu)$$

von μ Elementen und der Ordnung zwei erzeugt nach (48) und (49) den betreffenden Automorphismus, und es ist für alle Permutationen P_i der Gruppe

(95) $$P\,P_i\,P = P_i^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, \mu),$$

und jede Permutation PP_i hat die Ordnung zwei. Sodann ist

(96) $$P\,P_k\,P_i = P_i^{-1}\,P_k^{-1}\,P^{-1} = P_i^{-1}\,P\,P_k \qquad (i, k = 1, \ldots, \mu),$$

und alle konjugierten Automorphismen sind mit einander identisch, daher die Gruppe $\mathfrak{G}_\mu$ Abelsch. Entspricht U der Permutation (94), so findet durch (93) keine Erweiterung statt, und die Galoissche Gruppe der zugeordneten Bikörper reduziert sich auf die Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}_\mu$. [II, c), Schlußbemerkung.]

d) $H = h$ *bei Symmetrie.*

Bei Koinzidenz von h und H werden zwei Größen, die bei Vertauschung der α und A ineinander übergehen, einander gleich. Also ist nach (76) bei $H = h$

(97) $$Q_i = q\,U^{-1}\,T_i^{-1}\,U \qquad (i = 1, \ldots, \mu).$$

Unter den Bedingungen der Symmetrie besitzt zudem die Gleichung $\Phi_\mu(q, h, h) = 0$ eine Transformation in sich von der Periode zwei. Denn für $H = h$ werden die rationalen Funktionen (79) und (82) einander gleich und geben zufolge (84) eine Transformation der Periode zwei, die

(98) $$q\,T_i \text{ in } Q\,T_{k_0}\,T_i = q\,U^{-1}\,T_i^{-1}\,T_{k_0}^{-1}\,U \qquad (i = 1, \ldots, \mu)$$

überführt. Die durch $q_{(s)} = q + Q_{k_0}$ gegebene Funktion, welche $\Phi_\mu = 0$ in die Gleichung $\Psi_\mu(q_{(s)}, h + H, hH) = 0$ überführt, transformiert zwei Wurzeln von $\Phi_\mu(q, h, h) = 0$, die durch (98) ineinander übergehen, in eine Doppelwurzel von $\Psi_\mu(q_{(s)}, 2h, h^2) = 0$. Eine Wurzel, die durch (98) in sich übergeht, bleibt einfach.

Zur gruppentheoretischen Klassifizierung der Wurzeln von $\Phi_\mu(q, h, h) = 0$ wurde in a) bereits die Nebenklasse $U\mathfrak{G}_\mu$ herangezogen. Die besonderen Eigenschaften der Gleichung $\Psi_\mu(q_{(s)}, 2h, h^2) = 0$ werden durch die Nebenklasse $V\mathfrak{G}_\mu$ der dem Bikörper zugeordneten $\mathfrak{G}_{2\mu}$ vermittelt. Das Element V erzeugt denselben Automorphismus von

$\mathfrak{G}_\mu$ wie U. Daher ist unter Verwendung von (88)

$$U^{-1}T_i^{-1}T_{k_*}^{-1}U = V^{-1}T_i^{-1}T_{k_*}^{-1}V = V^{-1}T_i^{-1}V^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, \mu), \tag{99}$$

und (98) kann so geschrieben werden, daß

$$(qV^{-1})\,VT_i \text{ in } (qV^{-1})\,T_i^{-1}V^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, \mu) \tag{100}$$

übergeht. Das Element VT_i wird in das Inverse $(VT_i)^{-1}$ transformiert. Die Zusammenfassung mit der unter (70) ausgesprochenen Folgerung ergibt das Resultat:

$\Psi_\mu(q_{(s)}, 2h, h^2)$ zerfällt über $K(h)$ in Faktoren entsprechend den Klassen konjugierter und inverser Elemente von $V\mathfrak{G}_\mu$ [9]). Ist die Klasse konjugierter Elemente von der Klasse der Inversen verschieden, so werden die zwei entsprechenden Faktoren von $\Phi_\mu(q, h, h)$ gleichen Grades in einen Doppelfaktor desselben Grades von $\Psi_\mu(q_{(s)}, 2h, h^2)$ transformiert. Enthält hingegen die Klasse konjugierter Elemente die Inversen, so wird der entsprechende Faktor von $\Phi_\mu(q, h, h)$ in einen Doppelfaktor halben Grades oder in einen einfachen Faktor gleichen Grades von $\Psi_\mu(q_{(s)}\, 2h, h^2)$ transformiert, je nachdem die Ordnung der Elemente größer als zwei oder zwei und eins ist.

Das Dieder erzeugt nur einen Bikörper, der durch die Gleichung (9) gegeben ist. Für $h_2 = H_2$ und $h_3 = H_3$ zerfällt (9) in

$$(q_{(s)} - 2h_2)\,(q_{(s)} + h_2)^2\,[q_{(s)}^3 - 3h_2^2 q_{(s)} + 2(h_2^3 - 2h_2^2)] = 0\,. \tag{101}$$

Die Faktoren entsprechen den Elementen der Ordnung 1, 3, 2.

e) *Algebraische Bedeutung der Bikörper.*

Über einem Bikörper $K(h + H, hH, q_{(s)})$ hat das Kompositum aus $K(h, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ und $K(H, \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\nu)$ die zugeordnete $\mathfrak{G}_{2\mu}$ zur Gruppe. Es werden die zu den Untergruppen von $\mathfrak{G}_{2\mu}$ gehörigen Elemente des Kompositums betrachtet.

Sei $\mathfrak{H}_{2\tau}$ eine Untergruppe der Ordnung 2τ, deren Elemente zur Hälfte in $\mathfrak{G}_\mu$ und zur Hälfte in $V\mathfrak{G}_\mu$ enthalten sind. Die in $\mathfrak{G}_\mu$ enthaltenen Elemente bilden eine Gruppe $\mathfrak{H}_\tau$ der Ordnung τ, und es besteht

$$\mathfrak{H}_{2\tau} = \mathfrak{H}_\tau + V_*\mathfrak{H}_\tau\,, \tag{102}$$

wobei V_* ein Element aus $V\mathfrak{G}_\mu$ ist. V_* erzeugt einen Automorphismus von $\mathfrak{G}_\mu$, der $\mathfrak{H}_\tau$ invariant läßt. Ein solcher sei dem Bikörper zugeordnet. Alsdann seien β und B zu $\mathfrak{H}_\tau$ gehörige Elemente aus $K(h, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ bzw. $K(H, \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\nu)$ und $q_{(\beta)}$ ein zu $\mathfrak{H}_{2\tau}$ gehöriges Element aus dem Kompositum. Über $K(h, H, q_{(s)})$ hat das Kompositum $\mathfrak{G}_\mu$ zur Gruppe, und es ist

$$K(h, H, q_{(s)}, q_{(\beta)}) = K(h, H, q_{(s)}, \beta) = K(h, H, q_{(s)}, \mathsf{B})\,. \tag{103}$$

Daraus ergibt sich folgender Satz:

Die irreduzible Gleichung für $q_{(\beta)}$ aus $K(h + H, hH, q_{(s)})$ vom Grade $\mu : \tau$ bleibt bei Adjunktion von

$$\sqrt{(h + H)^2 - 4hH} \tag{104}$$

irreduzibel und läßt sich durch Tschirnhaustransformation in eine nur von h abhängige Gleichung transformieren oder in dieselbe nur von H abhängige Gleichung, wenn das Vorzeichen der Quadratwurzel (104) gewechselt wird.

Über dem Bikörper ist $\mathfrak{G}_{2\mu}/\mathfrak{g}$ die Galoissche Gruppe der Gleichung für $q_{(\beta)}$, wenn $\mathfrak{g}$ den größten Normalteiler von $\mathfrak{G}_{2\mu}$ bedeutet, der in $\mathfrak{H}_{2\tau}$ enthalten ist. Im allgemeinen ist $\mathfrak{g}$ vollständig in $\mathfrak{G}_\mu$ enthalten, und $\mathfrak{G}_{2\mu}/\mathfrak{g}$ reduziert sich bei Adjunktion von (104) auf $\mathfrak{G}_\mu/\mathfrak{g}$. Es kann aber auch der Fall eintreten, daß nur die Hälfte der Elemente von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{G}_\mu$ enthalten sind, die eine Untergruppe $\mathfrak{g}'$ von $\mathfrak{G}_\mu$ bilden. Dann ist

[9]) Zufolge Anmerkung [8]) können sämtliche Elemente von $\mathfrak{G}_{2\mu}$ als transformierende Elemente zugelassen werden.

(105) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + V'\mathfrak{g}' ,$$

wobei V' ein Element aus $V\mathfrak{G}_\mu$. Daraus ergibt sich unmittelbar, daß $\mathfrak{g}'$ Normalteiler von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{G}_\mu$ und $\mathfrak{G}_{2\mu}$ ist, ferner die Gruppenzerlegung

(106) $$\mathfrak{G}_{2\mu}/\mathfrak{g}' = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \times (\mathfrak{G}_\mu/\mathfrak{g}') .$$

Bei Adjunktion von (104) bleibt die Galoissche Gruppe der Gleichung für $q_{(\beta)}$ ungeändert. Denn es ist $\mathfrak{G}_{2\mu}/\mathfrak{g} = \mathfrak{G}_\mu/\mathfrak{g}'$, und (104) stellt eine akzessorische Irrationalität für diese dar. Der Fall $\mathfrak{g}' = E$, aus welchem der allgemeine Fall durch Erweiterung abgeleitet werden kann, betrifft den identischen Automorphismus von $\mathfrak{G}_\mu$. Setzt man $\mathfrak{G}_{2\mu} = \mathfrak{G}_2 \times \mathfrak{G}_\mu$, so wird (104) bei

(107) $$\mathfrak{H}_{2\tau} = \mathfrak{G}_2 \times \mathfrak{H}_\tau$$

zur akzessorischen Irrationalität. Der Normalkörper der Gleichung für $q_{(\beta)}$ ist sodann

(108) $$K(h + H, hH, q_{(s)}, \alpha_1 \mathsf{A}_1, \ldots, \alpha_\nu \mathsf{A}_\nu)$$

und läßt sich erst nach Adjunktion einer Quadratwurzel in das Kompositum von $K(h, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ und $K(H, \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\nu)$ überführen.

Über dem durch (9) definierten Bikörper des Dieders genügt $q_{(\alpha)} = \alpha\mathsf{A}$ der Gleichung

(109) $$z^3 - 3q_{(s)}z^2 + 3(q_{(s)}^2 - h_2H_2)\, z - 4h_3H_3 = 0 .$$

Sind d und D die Diskriminanten der kubischen Gleichungen (1) und (3), so gehört $\sqrt{dD}$ zufolge der Gleichung für $q_{(s)}$ dem Bikörper an, und die Diskriminante von (109) berechnet sich zu

(110) $$\Delta = (H_3\sqrt{d} + h_3\sqrt{D})^2 ,$$

ferner

(111) $$2^2 \cdot 3^3 \cdot (h_2^3H_3^2 - h_3^2H_2^3) = \sqrt{\Delta}(H_3\sqrt{d} - h_3\sqrt{D}) ,$$

so daß die Irrationalität (104) unter den natürlichen von (109) nicht enthalten ist.

Für die regulären Körper ist diese Materie in den Vorlesungen über das Ikosaeder von F. Klein eingehend behandelt. Daselbst findet zur Berechnung der Resolventen die formentheoretische Betrachtungsweise Anwendung. Die Formen in zwei Variablensystemen, die durch eine die Vertauschung der Systeme enthaltende Operation in sich übergehen, stehen zu den Elementen eines Bikörpers in der Beziehung, daß jeder Quotient aus diesen Formen von der Dimension Null ein Element $q_{(s)}$ darstellt. Die genannten Formen in zwei Variablensystemen lassen sich auch für Galoissche Funktionenkörper vom Geschlechte $p > 0$ definieren und treten in der Theorie der Modularkorrespondenzen auf. Die Beziehung zu den Elementen $q_{(s)}$ ergibt das in der älteren Literatur nirgends erwähnte Resultat, daß je vier Formen durch eine algebraische Relation untereinander verknüpft sind. Die Formentheorie gibt eine Lösung der Aufgabe, drei Elemente des Bikörpers zu finden, unter denen eine möglichst einfache Beziehung besteht.

Schlußbemerkung.

Die Untersuchung soll zunächst auf die Transformationstheorie der elliptischen Modulfunktionen Anwendung finden, ist aber auch allgemeiner auf automorphe Funktionen vom Geschlechte Null anwendbar und auf Funktionen höheren Geschlechtes, wenn an Stelle des Körpers der rationalen Funktionen von h ein entsprechender algebraischer Funktionenkörper eingeführt wird. Eine andere Verallgemeinerung ist die, daß die Gleichung $f_\nu = 0$ mehrere Parameter enthält.

Eingegangen 30. September 1931.

Eine neue Darstellung und neue Anwendungen der Viggo Brunschen Methode.

Von *Theodor Estermann* in London.

Einleitung.

Herr Brun [1]) hat bewiesen, daß jede hinreichend große gerade Zahl als Summe zweier Produkte von je 9 oder weniger Primzahlen darstellbar ist. Herr Rademacher [2]) hat gezeigt, daß die obige Behauptung auch noch mit „7“ statt „9“ richtig ist.

Ich erreiche hier das folgende noch schärfere Resultat:

Satz 1. *Jede hinreichend große gerade Zahl ist als Summe zweier Produkte von je 6 oder weniger Primzahlen darstellbar.*

Ferner beweise ich:

Satz 2. *Wenn die Realteile aller Nullstellen aller Dirichletschen L-Funktionen $\leqq 0,54$ sind, dann ist jede hinreichend große gerade Zahl als Summe einer Primzahl und eines Produktes von 6 oder weniger Primzahlen darstellbar.*

Meine Darstellung der Viggo Brunschen Methode weicht von den bisherigen [3]) vor allem insofern ab, als ich statt der „Aussiebung“ meinen Hilfssatz 1 benutze. Dadurch gelingt es, Summen mit unbeschränkt vielen Summationsvariablen zu vermeiden.

Bezeichnungen.

Im folgenden werde ich häufig von den logischen Zeichen & (und), $\rightarrow$ (wenn — so), $\sim$ (gleichwertig) und vom logischen Allzeichen Gebrauch machen [4]). Zur Ersparung von Klammern sei festgesetzt, daß das Allzeichen enger bindet als & und & wieder enger als $\rightarrow$ und $\sim$.

Alle m, r, k, l und s seien ganze Zahlen und $\geqq 0$, alle n, c, u, v und x natürliche Zahlen, die c übrigens passend zu wählende absolute Konstanten, t eine ganze Zahl $\geqq 2$, alle q, a und b quadratfreie natürliche Zahlen, alle p Primzahlen und α und ξ reelle Zahlen.

In allen mit dem Zeichen Σ geschriebenen Summen gebe ich unter diesem Zeichen zunächst sämtliche Summationsvariablen und dann sämtliche Summationsbedingungen an.

$\lambda(q)$ bezeichne die Anzahl der Primteiler von q:

$$\lambda(q) = \sum_{p \mid q}^{p} 1. \tag{1}$$

Eine leere Summe bedeute stets 0, ein leeres Produkt 1.

---

[1]) Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach (Videnskapselskapet Skrifter, Kristiania, 1920, I. Mat.-Naturw. Kl. Bd. 1, Nr. 3).

[2]) Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie (Hamburger Abh. **3** [1924], S. 12—30).

[3]) Vgl. außer den bereits genannten Arbeiten auch Landau, Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz (Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Kl., 1930, S. 255—276). Diese Abhandlung ist besonders leicht lesbar.

[4]) Siehe Hilbert und Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin 1928, Kap. 1 § 1 und Kap. 3 § 1.

§ 1. Zwei Hilfssätze.

Die triviale Hilfsfunktion $g(n)$ sei durch

$$g(1) = 1 \;\&\; g(n+1) = 0 \tag{2}$$

definiert.

Hilfssatz 1. *Für die Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_t$ sei*

$$n \leqq t \to b_n \mid b_{n-1}, \tag{3}$$

und die logische Funktion $B(q)$ sei durch

$$B(q) \sim q \mid b_0 \;\&\; (n)\left[n \leqq t \to \lambda\left(\frac{q}{(q, b_n)}\right) \leqq 2n - 1\right] \tag{4}$$

definiert. Dann ist

$$g(b_0) \geqq \sum_{\substack{q \\ B(q)}} (-1)^{\lambda(q)}. \tag{5}$$

Beweis. Im Falle $b_0 = 1$ ist die Behauptung trivial.

Es sei also $b_0 > 1$. Dann brauchen wir offenbar nur zu zeigen, daß auf jedes q mit $B(q) \;\&\; 2 \mid \lambda(q)$ mindestens ein q' mit $B(q') \;\&\; 2 \nmid \lambda(q')$ kommt. Nun sei b_{m_0} die letzte der Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_t$, die > 1 ist, und p_0 ein Primteiler von b_{m_0}, also

$$m_0 < m \leqq t \to b_m = 1 \tag{6}$$

und nach (3)

$$m \leqq m_0 \to p_0 \mid b_m. \tag{7}$$

Ich ordne nun jedem q die (offenbar quadratfreie) Zahl

$$q' = \begin{cases} q\,p_0^{-1} & (p_0 \mid q) \\ q\,p_0 & (p_0 \nmid q) \end{cases} \tag{8}$$

zu. Dann ist zunächst klar, daß verschiedenen q verschiedene q' entsprechen, und daß $2 \mid \lambda(q) \to 2 \nmid \lambda(q')$ gilt. Wir brauchen also nur noch

$$B(q) \;\&\; 2 \mid \lambda(q) \to B(q') \tag{9}$$

zu beweisen. Nun folgt aus (7) und (8)

$$m \leqq m_0 \to \frac{q'}{(q', b_m)} = \frac{q}{(q, b_m)} \tag{10}$$

und aus (6) und (8)

$$m_0 < m \leqq t \to \lambda\left(\frac{q'}{(q', b_m)}\right) = \lambda(q') \leqq \lambda(q) + 1 = \lambda\left(\frac{q}{(q, b_m)}\right) + 1. \tag{11}$$

Nach (4) und (11) ist

$$B(q) \;\&\; 2 \mid \lambda(q) \to \left[m_0 < m \leqq t \to \lambda\left(\frac{q'}{(q', b_m)}\right) \leqq 2m - 1\right] \tag{12}$$

(denn $2 \nmid s \;\&\; s \leqq 2m \to s \leqq 2m - 1$), und aus (4), (10) und (12) folgt (9), w. z. b. w.

Anmerkung. Ebenso kann man unter den Voraussetzungen (3) und

$$B'(q) \sim (m)\left[m \leqq t \to \lambda\left(\frac{q}{(q, b_m)}\right) \leqq 2\,m\right]$$

zeigen, daß $g(b_0) \leqq \sum\limits_{\substack{q \\ B'(q)}} (-1)^{\lambda(q)}$ ist. Dieser Satz kann auf dieselbe Weise zu Abschätzungen nach oben (z. B. zum Beweise des Satzes 10 der Arbeit des Herrn Landau [3])) verwandt werden wie im folgenden der Hilfssatz 1 zu Abschätzungen nach unten.

Die Funktion $w(q)$ heiße multiplikativ, wenn stets

$$q = q'q'' \to w(q) = w(q')w(q'') \tag{13}$$

ist.

Hilfssatz 2. *Die Funktion $w(q)$ sei multiplikativ, und es sei*

$$w(1) = 1 \,\&\, [q > 1 \to 0 \leqq w(q) < 1]; \tag{14}$$

für die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_t$ sei

$$n \leqq t \to a_n \mid a_{n-1} \tag{15}$$

und

$$a_t = 1; \tag{16}$$

die logische Funktion $A(q)$ sei durch

$$A(q) \sim q \mid a_0 \,\&\, (u)\left[u \leqq t \to \lambda\left(\frac{q}{(q, a_u)}\right) \leqq 2u - 1\right] \tag{17}$$

definiert; es sei

$$h_0 = 1{,}67, \tag{18}$$

$$\pi_n = \prod_{p \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right.} (1 - w(p)) \qquad (n = 1, 2, \ldots, t) \tag{19}$$

und

$$\pi_1 > \left(\frac{6}{7}\right)^2 h_0^{-1} \,\&\, (1 < n \leqq t \to \pi_n > h_0^{-1}). \tag{20}$$

Dann ist

$$\sum_{\substack{q \\ A(q)}} (-1)^{\lambda(q)} w(q) \geqq \frac{1}{20} \prod_{n=2}^{t} \pi_n . \tag{21}$$

Beweis [5]. Ich setze zur Abkürzung

$$E_s = \sum_{\substack{q \\ A(q),\, q \left| \frac{a_0}{a_s} \right.}} (-1)^{\lambda(q)} w(q) \qquad (s = 0, 1, \ldots, t), \tag{22}$$

$$E_s^{(r)} = \sum_{\substack{q \\ A(q),\, q \left| \frac{a_0}{a_s}, \, \lambda(q) = r \right.}} w(q) \qquad (s = 0, 1, \ldots, t) \tag{23}$$

und

$$S_n^{(r)} = \sum_{\substack{q \\ q \left| \frac{a_{n-1}}{a_n}, \, \lambda(q) = r \right.}} w(q) \qquad (n = 1, 2, \ldots, t). \tag{24}$$

Dann ist nach (16), (17) und (22)

$$E_t = \sum_{\substack{q \\ A(q)}} (-1)^{\lambda(q)} w(q) \tag{25}$$

und nach (19) und (24), da $w(q)$ multiplikativ ist,

$$n \leqq t \to \pi_n = \sum_{\substack{q \\ q \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right.}} (-1)^{\lambda(q)} w(q) = \sum_r (-1)^r S_n^{(r)}. \tag{26}$$

[5]) Einen Teil der hier auftretenden Schlüsse habe ich der Arbeit des Herrn Rademacher [2]) entnommen.

Da a_0 quadratfrei ist, so ist offenbar $\frac{a_0}{a_{n-1}}$ zu $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ teilerfremd, also

$$(27) \qquad n \leqq t \,\&\, q \,\Big|\, \frac{a_0}{a_n} \to \sum_{\substack{q',q'' \\ q'q''=q,\, q' \,\Big|\, \frac{a_0}{a_{n-1}},\, q'' \,\Big|\, \frac{a_{n-1}}{a_n}}} 1 = 1$$

und daher nach (23) und (13)

$$(28) \qquad n \leqq t \to E_n^{(r)} = \sum_{\substack{q',q'' \\ A(q'q''),\, q' \,\Big|\, \frac{a_0}{a_{n-1}},\, q'' \,\Big|\, \frac{a_{n-1}}{a_n},\, \lambda(q'q'')=r}} w(q')\, w(q'').$$

Im Falle $r < 2n$ kann hier nun $A(q'q'')$ durch $A(q')$ ersetzt werden, denn aus (17) und (15) folgt leicht

$$\lambda(q'q'') < 2n \leqq 2t \,\&\, q' \,\Big|\, \frac{a_0}{a_{n-1}} \,\&\, q'' \,\Big|\, \frac{a_{n-1}}{a_n} \to [A(q'q'') \sim A(q')].$$

Nach (28), (23) und (24) ist also

$$(29) \quad r < 2n \leqq 2t \to E_n^{(r)} = \sum_{\substack{k,l \\ k+l=r}} \sum_{\substack{q' \\ A(q'),\, q' \,\Big|\, \frac{a_0}{a_{n-1}},\, \lambda(q')=k}} w(q') \sum_{\substack{q'' \\ q'' \,\Big|\, \frac{a_{n-1}}{a_n},\, \lambda(q'')=l}} w(q'') = \sum_{\substack{k,l \\ k+l=r}} E_{n-1}^{(k)}\, S_n^{(l)}.$$

Aus (17) folgt ferner

$$n \leqq t \,\&\, A(q) \,\&\, q \,\Big|\, \frac{a_0}{a_n} \to \lambda(q) = \lambda\Big(\frac{q}{(q, a_n)}\Big) \leqq 2n - 1;$$

nach (23) ist daher

$$(30) \qquad n \leqq t \,\&\, r \geqq 2n \to E_n^{(r)} = 0.$$

Aus (23) und (14) folgt ferner

$$(31) \qquad (s \leqq t \to E_s^{(0)} = 1) \,\&\, E_0^{(1)} = 0,$$

also nach (29)

$$(32) \qquad E_1^{(1)} = E_0^{(0)}\, S_1^{(1)} + E_0^{(1)}\, S_1^{(0)} = S_1^{(1)},$$

und nach (22) und (23) ist

$$(33) \qquad s \leqq t \to E_s = \sum_r (-1)^r\, E_s^{(r)}.$$

Aus (33), (30), (29) und (26) folgt

$$(34) \qquad 2 \leqq n \leqq t \to E_n = \sum_{\substack{k,l \\ k+l<2n}} (-1)^{k+l}\, E_{n-1}^{(k)}\, S_n^{(l)}$$

$$= \sum_{k \leqq 2n-3}^{k} (-1)^k\, E_{n-1}^{(k)} \Big[\pi_n - \sum_{l \geqq 2n-k}^{l} (-1)^l\, S_n^{(l)}\Big] = E_{n-1}\,\pi_n - \sum_{k \leqq 2n-3}^{k} (-1)^k\, E_{n-1}^{(k)} \sum_{l \geqq 2n-k}^{l} (-1)^l\, S_n^{(l)}.$$

Nun ist nach (24), (1) und (13)

$$(35) \quad n \leqq t \to u S_n^{(u)} = \sum_{q \,\Big|\, \frac{a_{n-1}}{a_n},\, \lambda(q)=u}^{q} w(q) \sum_{\substack{p,q' \\ pq'=q}} 1 = \sum_{\substack{p,q' \\ (p,q')=1,\, pq' \,\Big|\, \frac{a_{n-1}}{a_n},\, \lambda(pq')=u}} w(p)\, w(q') \leqq \sum_{p \,\Big|\, \frac{a_{n-1}}{a_n}}^{p} w(p) \sum_{q' \,\Big|\, \frac{a_{n-1}}{a_n},\, \lambda(q')=u-1}^{q'} w(q') = S_n^{(1)}\, S_n^{(u-1)}.$$

Hieraus folgt durch vollständige Induktion

$$(36) \qquad n \leqq t \to S_n^{(r)} \leqq \frac{(S_n^{(1)})^r}{r!}$$

zunächst für $r \geqq 1$; die Formel gilt aber auch für $r = 0$, da offenbar $S_n^{(0)} = 1$ ist (unter 0^0 ist dabei 1 zu verstehen, falls $S_n^{(1)} = 0$ ist).

Ich setze noch zur Abkürzung

$$\tau = \log h_0. \tag{37}$$

Dann ist nach (14), (19), (20) und (24)

$$1 < n \leqq t \to S_n^{(1)} = \sum_{p \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right.} w(p) \leqq - \sum_{p \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right.} \log (1 - w(p)) = - \log \pi_n < \tau \tag{38}$$

und entsprechend

$$S_1^{(1)} < \tau + 2 \log \frac{7}{6}, \tag{39}$$

nach (18) also $n \leqq t \to S_n^{(1)} < 1$ und daher nach (35) $n \leqq t \to S_n^{(u)} \leqq S_n^{(u-1)}$, mithin

$$k \leqq 2n \leqq 2t \to \Big| \sum_{l \geqq 2n-k} (-1)^l S_n^{(l)} \Big| \leqq S_n^{(2n-k)}. \tag{40}$$

Setze ich

$$\Phi_n = \sum_{k+l=2n,\, l \geqq 3} E_{n-1}^{(k)} S_n^{(l)} \qquad (n = 2, 3, \ldots, t), \tag{41}$$

so folgt aus (34) und (40) $2 \leqq n \leqq t \to |E_n - E_{n-1}\pi_n| \leqq \Phi_n$, also nach (20)

$$2 \leqq n \leqq t \to \Big| E_n \prod_{m=2}^{n} \pi_m^{-1} - E_{n-1} \prod_{m=2}^{n-1} \pi_m^{-1} \Big| \leqq h_0^{n-1} \Phi_n$$

und daher

$$\Big| E_t \prod_{m=2}^{t} \pi_m^{-1} - E_1 \Big| \leqq \sum_{2 \leqq n \leqq t} h_0^{n-1} \Phi_n. \tag{42}$$

Nach (36) und (38) ist

$$2 \leqq n \leqq t \to S_n^{(r)} \leqq \frac{\tau^r}{r!}, \tag{43}$$

und aus (29), (30) und (43) folgt

$$2 \leqq n \leqq t \to 2^r \tau^{-r} E_n^{(r)} \leqq \sum_{k+l=r} 2^k \tau^{-k} E_{n-1}^{(k)} \frac{2^l}{l!}, \tag{44}$$

also

$$2 \leqq n \leqq t \,\&\, (k)\,(2^k \tau^{-k} E_{n-1}^{(k)} \leqq \alpha e^{2n-6}) \to 2^r \tau^{-r} E_n^{(r)} \leqq \alpha e^{2n-6} \sum_l \frac{2^l}{l!} = \alpha e^{2n-4}, \tag{45}$$

und hieraus folgt durch vollständige Induktion

$$(k)(2^k \tau^{-k} E_2^{(k)} \leqq \alpha) \,\&\, 2 \leqq n \leqq t \to 2^r \tau^{-r} E_n^{(r)} \leqq \alpha e^{2n-4}. \tag{46}$$

Setze ich

$$\varrho = 2\tau^{-1} \log \frac{7}{6}, \tag{47}$$

so ist nach (31), (32), (39) und (30)

$$E_1^{(0)} = 1 \,\&\, 2\tau^{-1} E_1^{(1)} < 2 + 2\varrho \,\&\, (r \geqq 2 \to E_1^{(r)} = 0); \tag{48}$$

nach (44) ist also

$$(49)\qquad 2^u \tau^{-u} E_2^{(u)} < \frac{2^u}{u!} + (2+2\varrho)\frac{2^{u-1}}{(u-1)!} = \frac{2^u}{u!}(1+u+u\varrho).$$

Nun ist nach (18), (37) und (47)

$$(50)\qquad 0{,}512 < \tau < 0{,}513 \;\&\; \varrho < 0{,}604,$$

also nach (49)

$$2\tau^{-1}E_2^{(1)} < 2(2+\varrho) < 6 \;\&\; 4\tau^{-2}E_2^{(2)} < 2(3+2\varrho) < 8{,}42 \;\&\; 8\tau^{-3}E_2^{(3)} < \frac{4}{3}(4+3\varrho) < 8.$$

Setze ich also

$$(51)\qquad \alpha = 8{,}42,$$

so ist wegen (30) und (31)

$$(52)\qquad (k)(2^k \tau^{-k} E_2^{(k)} < \alpha)$$

und daher nach (46)

$$(53)\qquad 2 \leqq n \leqq t \to 2^r \tau^{-r} E_n^{(r)} \leqq \alpha e^{2n-4}.$$

Nach (41) und (43) ist

$$(54)\qquad 2 \leqq n \leqq t \to \Phi_n \leqq \sum_{\substack{k,l \\ k+l=2n,\ l\geqq 3}} E_{n-1}^{(k)} \frac{\tau^l}{l!},$$

also nach (48) und (50)

$$(55)\qquad \Phi_2 < \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^3}{3!}\tau(1+\varrho) = \frac{\tau^4}{6}(1{,}25+\varrho) < 0{,}0215$$

und nach (53)

$$(56)\quad 3 \leqq n \leqq t \to \Phi_n < \alpha e^{2n-6}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2n} \sum_{l\geqq 3} \frac{2^l}{l!} = \alpha e^{2n-6}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2n}(e^2-5).$$

Aus (42), (56), (55), (18) und (51) folgt

$$(57)\qquad \left|E_t \prod_{m=2}^{t} \pi_m^{-1} - E_1\right| < h_0\Phi_2 + \alpha e^{-6}(e^2-5)h_0^{-1} \sum_{n\geqq 3}^{n} \left(h_0 e^2 \frac{\tau^2}{4}\right)^n$$

$$= h_0\Phi_2 + \alpha h_0^2 (e^2-5)\left(\frac{\tau}{2}\right)^6 \left(1 - h_0 e^2 \frac{\tau^2}{4}\right)^{-1} < 0{,}122.$$

Nach (33), (48) und (50) ist ferner

$$(58)\qquad E_1 > 1 - \tau(1+\varrho) > 0{,}177,$$

aus (57) und (58) folgt $E_t \prod_{m=2}^{t} \pi_m^{-1} > 0{,}055$, und hieraus und aus (25) folgt (21), w. z. b. w.

§ 2. Beweis des Satzes 1.

Es genügt offenbar, zu zeigen, daß es zu jedem hinreichend großen x ein $v < 2x$ gibt, so daß sowohl die Primteiler von v als auch die von $2x - v$ sämtlich $> \sqrt[7]{2x}$ sind. Setze ich also

$$(59)\qquad x_0 = \prod_{p \leqq \sqrt[7]{2x}} p$$

und

$$(60)\qquad N = \sum_{\substack{v \\ v<2x,\ (v(2x-v),\ x_0)=1}} 1,$$

so brauche ich nur

$$x > c_1 \to N > 0 \tag{61}$$

zu beweisen.

Ich setze (mit Herrn Rademacher)

$$h = \frac{89}{69}. \tag{62}$$

Dann ist nach (18)

$$h^2 < h_0. \tag{63}$$

Nach einem Satz von Mertens[6]) existiert $\lim_{\xi\to\infty}\left(\sum_{\substack{p\\ p\leqq\xi}}\frac{1}{p} - \log\log\xi\right)$ und daher auch $\lim_{\xi\to\infty}\left[\sum_{\substack{p\\ 3\leqq p\leqq\xi}}\log\left(1-\frac{2}{p}\right) + 2\log\log\xi\right]$. Nach (63) gibt es also ein $c_2 \geqq 3$, so daß

$$\xi \geqq c_2 \to \left|\sum_{\substack{p\\ c_1<p\leqq\xi}}\log\left(1-\frac{2}{p}\right) + 2\log\log\xi - 2\log\log c_2\right| < \frac{1}{2}\log h_0 - \log h \tag{64}$$

ist.

Von nun an sei

$$2x > c_2^{\frac{49}{3}h}. \tag{65}$$

Ich setze nun

$$c_3 = \prod_{p\leqq c_1} p \tag{66}$$

und

$$a_0 = \prod_{c_1<p\leqq\sqrt[7]{2x}} p \;\&\; a_n = \prod_{c_1<p\leqq(2x)^{\frac{6}{49}h^{-n}}} p \tag{67}$$

und bezeichne[7]) mit t die kleinste Zahl mit der Eigenschaft $a_t = 1$. Dann sind (15) und (16) offenbar erfüllt. Nach (67) und (64) ist ferner

$$1 < n \leqq t \to \log\prod_{p\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right.}\left(1-\frac{2}{p}\right) = \sum_{\substack{p\\ \max\left(c_1,(2x)^{\frac{6}{49}h^{-n}}\right)<p\leqq(2x)^{\frac{6}{49}h^{-n+1}}}}\log\left(1-\frac{2}{p}\right)$$

$$> -2\log\log\left((2x)^{\frac{6}{49}h^{-n+1}}\right) + 2\log\log\left((2x)^{\frac{6}{49}h^{-n}}\right) - \log h_0 + 2\log h = -\log h_0$$

und

$$\log\prod_{p\left|\frac{a_0}{a_1}\right.}\left(1-\frac{2}{p}\right) > -2\log\log\sqrt[7]{2x} + 2\log\log\left((2x)^{\frac{6}{49}h^{-1}}\right) - \log h_0 + 2\log h$$

$$= 2\log\frac{6}{7} - \log h_0,$$

also

$$\prod_{p\left|\frac{a_1}{a_0}\right.}\left(1-\frac{2}{p}\right) > \left(\frac{6}{7}\right)^2 h_0^{-1} \;\&\; \left[1 < n \leqq t \to \prod_{p\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right.}\left(1-\frac{2}{p}\right) > h_0^{-1}\right]. \tag{68}$$

---

[6]) Siehe z. B. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. I, S. 102.

[7]) Das ist erlaubt, denn aus (64) folgt wegen $\frac{1}{2}\log h_0 - \log h < 2\log 2$, daß es mindestens ein p mit $c_2 < p \leqq c_2^2$ gibt, so daß die hier mit t bezeichnete Zahl nach (65) und (67) wirklich $\geqq 2$ ist.

Nach (59), (65), (66) und (67) ist

$$x_0 = c_3 a_0 \,\&\, (c_3, a_0) = 1 \,. \tag{69}$$

Nun sei v_0 eine Zahl mit der Eigenschaft

$$(v_0(2x - v_0), c_3) = 1 \,. \tag{70}$$

Solche Zahlen gibt es: z. B. hat jede Lösung des Kongruenzenpaares

$$v_0 \equiv 2 \pmod{(2x-1, c_3)}, \;\&\; v_0 \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\, \frac{c_3}{(2x-1, c_3)}\right)$$

(dessen Moduln wegen der Quadratfreiheit von c_3 zueinander teilerfremd sind) diese Eigenschaft. Dann ist nach (69)

$$v \equiv v_0 \pmod{c_3} \,\&\, (v(2x - v), a_0) = 1 \to (v(2x - v), x_0) = 1$$

und daher nach (60) und (2)

$$N \geqq \sum_{\substack{v \\ v<2x,\, c_3 \mid v - v_0}} g((v(2x - v), a_0)) \,. \tag{71}$$

Jetzt wende ich Hilfssatz 1 mit $b_m = (v(2x - v), a_m)$ an und setze zu diesem Zweck

$$C(q, v) \sim q \mid (v(2x - v), a_0) \,\&\, (u) \left[u \leqq t \to \lambda\left(\frac{q}{(q, v(2x - v), a_u)}\right) \leqq 2u - 1\right] \,. \tag{72}$$

Dann erhalte ich

$$g((v(2x - v), a_0)) \geqq \sum_{\substack{q \\ C(q, v)}} (-1)^{\lambda(q)} \,. \tag{73}$$

Nun ist nach (72) und (17) $C(q, v) \sim q \mid v(2x - v) \,\&\, A(q)$ und daher nach (71) und (73)

$$N \geqq \sum_{\substack{v \\ v<2x,\, c_3 \mid v - v_0}} \sum_{\substack{q \\ q \mid v(2x-v),\, A(q)}} (-1)^{\lambda(q)} = \sum_{\substack{q \\ A(q)}} (-1)^{\lambda(q)} \sum_{\substack{v \\ v<2x,\, c_3 \mid v - v_0,\, q \mid v(2x-v)}} 1 \,. \tag{74}$$

Die Bedingung $q \mid v(2x - v)$ ist gleichwertig mit der Zugehörigkeit von v zu einer Zahlenmenge, die aus $2^{\lambda(q) - \lambda((q, 2x))}$ Restklassen mod q besteht, und da nach (17) und (69)

$$A(q) \to (c_3, q) = 1 \tag{75}$$

ist, so besteht im Falle $A(q)$ die Menge der Zahlen v mit $c_3 \mid v - v_0 \,\&\, q \mid v(2x - v)$ aus ebenso vielen Restklassen mod $c_3 q$, es ist also

$$A(q) \to \left| \sum_{\substack{v \\ v<2x,\, c_3 \mid v - v_0,\, q \mid v(2x-v)}} 1 - \frac{2x}{c_3 q} 2^{\lambda(q) - \lambda((q, 2x))} \right| \leqq 2^{\lambda(q)} \,. \tag{76}$$

Setze ich also

$$w(q) = q^{-1} 2^{\lambda(q) - \lambda((q, 2x))} \tag{77}$$

und

$$R = \sum_{\substack{q \\ A(q)}} 2^{\lambda(q)} \,, \tag{78}$$

so ist nach (74) und (76)

$$N \geqq \frac{2x}{c_3} \sum_{\substack{q \\ A(q)}} (-1)^{\lambda(q)} w(q) - R \,, \tag{79}$$

und die Funktion $w(q)$ ist multiplikativ und erfüllt die Bedingung (14). Definiere ich noch π_n durch (19), so folgt aus (68) und (77), daß auch (20) gilt. Ich kann also Hilfssatz 2 anwenden und erhalte aus (79), (21), (19) und (77)

$$N \geqq \frac{x}{10 c_3} \prod_{p \mid a_1} (1 - 2p^{-1}) - R \,. \tag{80}$$

Nach (67), (65) und (64) ist (wegen $\frac{1}{2}\log h_0 - \log h < 2\log\log c_2$)

$$\log \prod_{p|a_1} (1-2p^{-1}) = \sum_{c_2<p\leqq(2x)^{\frac{6}{49}h^{-1}}} \log\left(1-\frac{2}{p}\right) > -2\log\log((2x)^{\frac{6}{49}h^{-1}}) > -2\log\log x\,,$$

also

$$\prod_{p|a_1} (1-2p^{-1}) > (\log x)^{-2}\,. \tag{81}$$

Um endlich R abzuschätzen, setze ich

$$R_m = \sum_{\substack{q \\ A(q),\,\lambda(q)=m}} 1\,. \tag{82}$$

Dann ist nach (78) (da aus (17) und (16) folgt $A(q) \to \lambda(q) < 2t$)

$$R = \sum_{\substack{m \\ m<2t}} 2^m R_m\,. \tag{83}$$

Aus (82), (17) und (1) folgt nun zunächst

$$R_0 = 1 \;\&\; R_1 = \lambda(a_0)\,. \tag{84}$$

Aus (17) folgt ferner

$$A(q)\,\&\,1 \leqq \left[\frac{m}{2}\right] \leqq t\,\&\,\lambda(q) = m \to (q, a_{\left[\frac{m}{2}\right]}) > 1\,,$$

also

$$2 \leqq \lambda(q) = m \leqq 2t+1\,\&\,A(q) \to 1 \leqq \sum_{p|(q,a_{\left[\frac{m}{2}\right]})} 1 = \sum_{pq'=q,\,p|a_{\left[\frac{m}{2}\right]}} 1$$

und daher nach (82)

$$2 \leqq m \leqq 2t+1 \to R_m \leqq \sum_{A(pq'),\,\lambda(q')=m-1,\,p|a_{\left[\frac{m}{2}\right]}} 1 \leqq \sum_{p|a_{\left[\frac{m}{2}\right]}} \sum_{A(q'),\,\lambda(q')=m-1} 1 = \lambda(a_{\left[\frac{m}{2}\right]}) R_{m-1}\,. \tag{85}$$

Aus (84), (85) und $r < t \to a_r > 1$ (vgl. die Definition von t) folgt nun

$$m < 2t \to R_m \leqq \prod_{n=1}^{m} \lambda(a_{\left[\frac{n}{2}\right]}) \leqq \lambda(a_0) \prod_{r=1}^{t-1} \lambda^2(a_r)\,. \tag{86}$$

Nach (83) und (86) ist

$$R < 2^{2t}\,\lambda(a_0) \prod_{r=1}^{t-1} \lambda^2(a_r) = 4\lambda(a_0) \prod_{r=1}^{t-1} (2\lambda(a_r))^2\,. \tag{87}$$

Nun ist nach (67) (wegen $c_2 \geqq 3$) $2\lambda(a_0) < (2x)^{\frac{1}{7}}$ & $2\lambda(a_n) < (2x)^{\frac{6}{49}h^{-n}}$, also nach (87) und (62)

$$R < 2(2x)^{\frac{1}{7}+\frac{12}{49}(h-1)^{-1}} = 2(2x)^{\frac{242}{245}}\,, \tag{88}$$

und aus (80), (81) und (88) folgt (61), w. z. b. w.

§ 3. Beweis des Satzes 2.

In diesem Paragraphen sei die folgende Vermutung als richtig angenommen: *Die Realteile aller Nullstellen aller Dirichletschen L-Funktionen sind* $\leqq 0{,}54$. Dann ist, wenn φ die Eulersche Funktion bezeichnet,

$$\left| \sum_{\substack{p \\ p<u,\,p\equiv l \pmod n}} \log p - g((n,l))\frac{u}{\varphi(n)} \right| < c_4 u^{0{,}5401}\,. \tag{89}$$

Es sei dem Leser überlassen, diese Behauptung zu beweisen oder die Formel (89) statt der vorangehenden Vermutung ohne Beweis hinzunehmen.

Setze ich nun

$$M = \sum_{\substack{p \\ p<2x,(2x-p,x_0)=1}} \log p\,, \tag{90}$$

so brauche ich wegen (59) offenbar nur noch

$$x > c_5 \to M > 0 \tag{91}$$

zu beweisen.

Aus dem erwähnten Satz von Mertens[6]) folgt auch die Existenz von

$$\lim_{\xi\to\infty}\left[\sum_{\substack{p \\ 3\leqq p\leqq\xi}} \log\left(1-\frac{1}{p-1}\right)+\log\log\xi\right];$$

nach (63) gibt es also ein $c_6 \geqq 3$, so daß

$$\xi \geqq c_6 \to \left|\sum_{\substack{p \\ c_6<p\leqq\xi}} \log\left(1-\frac{1}{p-1}\right)+\log\log\xi-\log\log c_6\right| < \frac{1}{2}\log h_0 - \log h \tag{92}$$

ist.

Statt (65) sei jetzt

$$2x > c_6^{\frac{343}{18}h^2}. \tag{93}$$

Ich setze nun

$$c_7 = \prod_{p\leqq c_6} p \tag{94}$$

und statt (67)

$$a_0 = \prod_{c_6<p\leqq\sqrt[7]{2x}} p \;\&\; a_n = \prod_{c_6<p\leqq(2x)^{\frac{36}{343}h-2n}} p \tag{95}$$

und bezeichne mit t wieder die kleinste Zahl mit der Eigenschaft $a_t = 1$. Dann sind (15) und (16) wieder erfüllt. Nach (95) und (92) ist ferner (vgl. die Herleitung von (68))

$$\prod_{p\left|\frac{a_1}{a_0}\right.}\left(1-\frac{1}{p-1}\right) > \left(\frac{6}{7}\right)^2 h_0^{-1} \;\&\; \left[1<n\leqq t\to\prod_{p\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right.}\left(1-\frac{1}{p-1}\right) > h_0^{-1}\right]. \tag{96}$$

Nach (59), (93), (94) und (95) ist

$$x_0 = c_7 a_0 \;\&\; (c_7, a_0) = 1\,. \tag{97}$$

Nun sei v_1 eine Zahl mit der Eigenschaft (vgl. (70))

$$(v_1(2x-v_1),\ c_7) = 1\,. \tag{98}$$

Dann ist nach (97)

$$p \equiv v_1 \pmod{c_7} \;\&\; (2x-p, a_0) = 1 \to (2x-p, x_0) = 1$$

und daher nach (90) und (2)

$$M \geqq \sum_{\substack{p \\ p<2x,\ c_7\mid p-v_1}} g((2x-p, a_0))\log p\,. \tag{99}$$

Jetzt wende ich Hilfssatz 1 mit $b_m = (2x-p, a_m)$ an und setze zu diesem Zweck

$$D(q,p) \sim q\,|\,(2x-p, a_0) \;\&\; (u)\left[u\leqq t\to\lambda\left(\frac{q}{(q, 2x-p, a_u)}\right)\leqq 2u-1\right]. \tag{100}$$

Dann erhalte ich

$$g((2x-p, a_0)) \geqq \sum_{\substack{q \\ D(q,p)}} (-1)^{\lambda(q)}. \tag{101}$$

Nun ist nach (100) und (17) $D(q, p) \sim q \mid 2x - p \;\&\; A(q)$ und daher nach (99) und (101)

$$M \geqq \sum_{\substack{q \\ A(q)}} (-1)^{\lambda(q)} \sum_{\substack{p \\ p<2x,\, c_7 \mid p-v_1,\, q \mid 2x-p}} \log p. \tag{102}$$

Aus (17) und (97) folgt $A(q) \to (c_7, q) = 1$; zu jedem q mit der Eigenschaft $A(q)$ gibt es also eine Zahl l mit $l \equiv v_1 \pmod{c_7} \;\&\; l \equiv 2x \pmod{q}$, woraus übrigens wegen (98) $(q, 2x) = (c_7 q, l)$ folgt, und für dieses l ist offenbar

$$c_7 \mid p - v_1 \;\&\; q \mid 2x - p \sim p \equiv l \pmod{c_7 q}.$$

Nach (89) ist daher

$$A(q) \to \left| \sum_{\substack{p \\ p<2x,\, c_7 \mid p-v_1,\, q \mid 2x-p}} \log p - g((q, 2x)) \frac{2x}{\varphi(c_7)\,\varphi(q)} \right| < c_4 (2x)^{0{,}5401}. \tag{103}$$

Jetzt setze ich statt (77)

$$w(q) = \frac{g((q, 2x))}{\varphi(q)} \tag{104}$$

und

$$R' = \sum_{\substack{q \\ A(q)}} 1. \tag{105}$$

Dann ist nach (102) und (103)

$$M \geqq \frac{2x}{\varphi(c_7)} \sum_{\substack{q \\ A(q)}} (-1)^{\lambda(q)} w(q) - c_4 R' (2x)^{0{,}5401}, \tag{106}$$

und $w(q)$ ist wieder multiplikativ und erfüllt die Bedingung (14). Definiere ich π_n wieder durch (19), so folgt aus (96) und (104), daß auch (20) gilt. Ich kann also wieder Hilfssatz 2 anwenden und erhalte aus (106), (21), (19) und (104)

$$M \geqq \frac{x}{10\,\varphi(c_7)} \prod_{p \mid a_1} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) - c_4 R' (2x)^{0{,}5401}. \tag{107}$$

Nach (95), (93) und (92) ist (vgl. die Herleitung von (81))

$$\prod_{p \mid a} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) > (\log x)^{-1}. \tag{108}$$

Nach (105) und (82) ist (vgl. (83))

$$R' = \sum_{\substack{m \\ m<2t}} R_m, \tag{109}$$

die Formel (86) gilt unverändert, und nach (95) ist (wegen $c_6 \geqq 3$)

$$\lambda(a_0) < \tfrac{1}{2}(2x)^{\frac{1}{7}} \;\&\; \lambda(a_n) < \tfrac{1}{2}(2x)^{\frac{36}{343}h - 2n},$$

also nach (86) und (62) $m < 2t \to R_m < 2^{-2t+1}(2x)^{\frac{1}{7} + \frac{72}{343}(h^2-1)^{-1}} < (2t)^{-1}(2x)^{0{,}4592}$ und daher nach (109)

$$R'(2x)^{0{,}5401} < (2x)^{0{,}9993}. \tag{110}$$

Aus (107), (108) und (110) folgt (91), w. z. b. w.

Eingegangen 17. Oktober 1931.

Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen.

II. Abhandlung.

Von *Kurt Hensel* in Marburg.

I.

Ich erinnere zuerst kurz an die Ergebnisse meiner ersten Abhandlung (ds. Journ. Bd. 165 [1931], S. 257–264), soweit sie für die ferneren Untersuchungen wesentlich sind. Dann wird diese zweite Arbeit auch ohne das Studium der ersten Abhandlung verständlich sein.

Die Grundaufgabe der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen besteht darin, eine Wurzel ζ oder alle Wurzeln $\zeta, \zeta', \ldots$, welche eine im Körper $\mathfrak{R}(x, y)$ aller rationalen Funktionen von x und y unzerlegbare Gleichung

$$(1) \qquad F(z; x, y) = a_0(x, y)z^n + a_1(x, y)z^{n-1} + \cdots + a_n(x, y) = 0$$

in einem geeignet gewählten Oberkörper von $\mathfrak{R}(x, y)$ besitzt, nach ihren Teilbarkeitsbeziehungen zu einer beliebigen rationalen Primfunktion $p(x, y)$ zu betrachten. Um diese Frage zu lösen und insbesondere zu einem Oberkörper von $\mathfrak{R}(x, y)$ zu gelangen, in welchem unsere Gleichung (1) überhaupt eine modulo p untersuchbare Wurzel ζ hat erweiterte ich zunächst den Koeffizientenkörper $\mathfrak{R}(x, y)$ zum Körper $\mathfrak{R}(p)$ der p-adischen Zahlen

$$a = a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \cdots$$

mit modulo p ganzen rationalen Koeffizienten oder Ziffern a_i und damit den zu untersuchenden Oberkörper $\mathfrak{R}(\zeta; x, y)$ zum Körper $\mathfrak{R}(\zeta, p)$ aller rationalen Funktionen von ζ mit p-adischen Koeffizienten, wo jetzt ζ eine Wurzel von $F(z) = 0$ in einem geeigneten Oberkörper von $\mathfrak{R}(p)$ bedeutet.

In diesem Erweiterungskörper $\mathfrak{R}(p)$ zerfällt nun die in $\mathfrak{R}(x, y)$ irreduzible Grundfunktion $F(z; x, y)$ eindeutig in ein Produkt

$$(2) \qquad F(z; x, y) = f_1(z, p) \cdots f_\nu(x, p)$$

von lauter verschiedenen p-adischen Primfaktoren. Jede Wurzel ζ von $F(z) = 0$ muß dann also Wurzel von einer der ν Gleichungen $f_i(z, p) = 0$ sein.

Es sei nun

$$(3) \qquad f(z, p) = b_0(p)\, z^\lambda + b_1(p)\, z^{\lambda-1} + \cdots + b_\lambda(p)$$

eine dieser ν Primfunktionen. Dann hatten wir einen kleinsten Oberkörper von $\mathfrak{R}(p)$ gefunden, in welchem die Gleichung $f(z, p) = 0$ eine Wurzel ζ besitzt. Dies war der zu der Primfunktion $f(z)$ gehörige Kongruenzkörper $\mathfrak{R}_f(z, p)$ aller modulo $f(z)$ ganzen rationalen Funktionen $v(z) = \dfrac{m(z)}{n(z)}$ mit p-adischen Koeffizienten, modulo $f(z)$ betrachtet.

Dieser Körper ist algebraisch vom Grade λ über $\mathfrak{R}(p)$, da modulo $f(z)$ λ linear unabhängige Elemente in ihm existieren, z. B. $1, z, z^2, \ldots, z^{\lambda-1}$, während $\lambda + 1$ seiner

Elemente stets linear abhängig sind. Jedes Element v genügt also einer Hauptgleichung λ-ten Grades

$$G(v, p) = v^\lambda - b_1(p)\, v^{\lambda-1} + \cdots + (-1)^\lambda b_\lambda(p) = 0 \tag{4}$$

mit p-adischen Koeffizienten, deren linke Seite irreduzibel oder die Potenz einer irreduziblen Funktion ist, je nachdem v ein primitives oder ein nicht primitives Element von $\mathfrak{R}_f(z, p)$ ist. v heißt ganz oder gebrochen, je nachdem seine Hauptfunktion $G(v, p)$ lauter ganze p-adische Koeffizienten $b_i(p)$ besitzt oder nicht, oder auch, was hier genau dasselbe besagt, je nachdem ihr letzter Koeffizient

$$n(v) = b_\lambda(p) \tag{5}$$

eine ganze oder eine gebrochene p-adische Zahl ist.

Die ganzen Elemente $v, w, \ldots$ von $\mathfrak{R}_f(z, p)$ bilden für sich einen Integritätsbereich $J(v, w, \ldots)$, dessen Elemente eindeutig durch ein sog. Fundamentalsystem $z_1, \ldots, z_\lambda$, d. h. durch eine Basis von λ ganzen Elementen z_i, in der Form

$$v = a_1 z_1 + \cdots + a_\lambda z_\lambda$$

mit ganzen p-adischen Koeffizienten eindeutig darstellbar sind.

Jedes ganze Element ε, dessen Norm $e = n(\varepsilon)$ eine p-adische Einheit ist, heißt eine algebraische Einheit. Jedes ganze Element π, dessen Norm $n(\pi) = ep^f$ von kleinster positiver Ordnung f ist, heißt eine Primzahl unseres Körpers, und f ist der Grad jener Primzahl. Jedes andere ganze oder gebrochene Element $a, a', \ldots$ von $\mathfrak{R}_f(z, p)$ läßt sich dann eindeutig in der Form:

$$a = \varepsilon \pi^\alpha, \quad a' = \varepsilon' \pi^{\alpha'}, \ldots \tag{6}$$

darstellen, wo $\varepsilon, \varepsilon', \ldots$ Einheiten bedeuten und wo die ganzzahligen Ordnungszahlen $\alpha, \alpha', \ldots$ von $a, a', \ldots$ nicht negativ oder negativ sind, je nachdem $a, a', \ldots$ ganz oder gebrochen sind.

Ist die rationale Primzahl $p = \varepsilon \pi^e$, so heißt e die Ordnung von z und es ergibt sich direkt, daß das Produkt ef aus Ordnung und Grad der Primzahl π stets gleich dem Grad λ des Körpers $\mathfrak{R}_f(z, p)$ ist.

Auf Grund der Darstellung (6) können nun alle Elemente von $\mathfrak{R}_f(z, p)$ eindeutig bewertet werden, indem man

$$a > a' \quad \text{oder} \quad a \sim a'$$

nennt, je nachdem für ihre Ordnungszahlen

$$\alpha < \alpha' \quad \text{oder} \quad \alpha = \alpha'$$

ist.

Dann zeigt man leicht, daß für diese Bewertung seiner Elemente der Kongruenzkörper $\mathfrak{R}_f(z, p)$ ein perfekter, d. h. ein Körper ist, welcher alle seine Grenzwerte selbst enthält. Bildet man nämlich in der gewöhnlichen Weise den kleinsten perfekten Oberkörper zu $\mathfrak{R}_f(z, p)$ so erhält man den Körper $\mathfrak{R}(\pi)$ aller sog. π-adischen Zahlen, nämlich aller Zahlgrößen

$$a = a_\alpha \pi^\alpha + a_{\alpha+1} \pi^{\alpha+1} + \cdots = a_\alpha a_{\alpha+1} \ldots, \tag{7}$$

deren Ziffern ganze Elemente von $\mathfrak{R}_f(z, p)$ sind; und man erkennt ohne weiteres, daß nicht bloß jedes Element von $\mathfrak{R}_f(z, p)$ auch zu $\mathfrak{R}(\pi)$ gehört, sondern daß auch umgekehrt jede π-adische Zahl dem Körper $\mathfrak{R}_f(z, p)$ angehört, daß also $\mathfrak{R}_f(z, p) = \mathfrak{R}(\pi)$ ist. Wir können und wollen daher die Zahlen von $\mathfrak{R}_f(z, p)$ auch als π-adische Zahlen, d. h. in der Form (7) gegeben voraussetzen. Allgemeiner können sie auch in der Form

$$a' = a'_\alpha \pi_\alpha + a'_{\alpha+1} \pi_{\alpha+1} + \cdots \tag{7 a}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a'_i geschrieben werden, wo jetzt aber $\pi_\alpha, \pi_{\alpha+1}, \ldots$ beliebige Elemente aus $\mathfrak{R}(\pi)$ sind, welche die Ordnungszahlen $\alpha, \alpha + 1, \ldots$ besitzen.

Genau ebenso, wie jede p-adische Zahl $a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \cdots$ einer eindeutig bestimmten reduzierten $a_\alpha^{(0)} p^\alpha + a_{\alpha+1}^{(0)} p^{\alpha+1} + \cdots$ mit modulo p reduzierten ganzen rationalen Koeffizienten $a_i^{(0)}$ gleich ist, so gibt es unter den unendlich vielen Darstellungen $a_\alpha \pi^\alpha + a_{\alpha+1}\pi^{\alpha+1} + \cdots$ einer beliebigen π-adischen Zahl eine einzige ihr gleiche reduzierte $a_\alpha^{(0)}\pi^\alpha + a_{\alpha+1}^{(0)}\pi^{\alpha+1} + \cdots$. Die folgende Überlegung führt uns unmittelbar zu ihrer Darstellung.

Ich nenne r ganze π-adische Zahlen $y_1, \ldots, y_r$ modulo π linear abhängig oder linear unabhängig je nachdem zwischen ihnen eine lineare Kongruenz

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_r y_r \equiv 0 \pmod{\pi}$$

mit nicht sämtlich durch π teilbaren ganzen p-adischen Koeffizienten besteht oder nicht besteht. Es seien nun unter den λ Elementen $z_1, \ldots, z_\lambda$ unseres Fundamentalsystems $\mathfrak{f}$, etwa $z_1, \ldots, z_\mathfrak{f}$, modulo π linear unabhängig, während je $\mathfrak{f}+1$ unter ihnen linear abhängig sind, so ist jedes ganze Element $a = a_1 z_1 + \cdots + a_\lambda z_\lambda$ einem einzigen reduzierten Elemente $a^{(0)} = a_1^{(0)} z_1 + \cdots + a_\mathfrak{f}^{(0)} z_\mathfrak{f}$ mit modulo p reduzierten ganzen Koeffizienten modulo π kongruent, d. h. es besteht stets eine eindeutig bestimmte Gleichung

$$a = a^{(0)} + \pi \bar{a} \tag{7 b}$$

wo $\bar{a}$ wieder ganz ist; auch im Körper $\mathfrak{R}(\pi)$ besteht also für die Primzahl π der Satz von der eindeutig bestimmten Division mit Rest.

Auf Grund dieser Tatsache erhält man nun die zu einer beliebigen Zahl

$$a = a_\alpha \pi^\alpha + a_{\alpha+1}\pi^{\alpha+1} + \cdots$$

gleiche eindeutig bestimmte reduzierte Zahl

$$a_\alpha^{(0)}\pi^\alpha + a_{\alpha+1}^{(0)}\pi^{\alpha+1} + \cdots$$

einfach dadurch, daß man von der ersten Ziffer a_α anfangend diese nach (7 b) in der Form $a_\alpha^{(0)} + \pi \bar{a}_\alpha$ schreibt und dann a durch die ihr offenbar gleiche Zahl

$$a = a_\alpha^{(0)}\pi^\alpha + (\bar{a}_\alpha + a_{\alpha+1})\,\pi^{\alpha+1} + a_{\alpha+2}\pi^{\alpha+2} + \cdots = a_\alpha^{(0)}\pi^\alpha + \bar{a}_{\alpha+1}\pi^{\alpha+1} + \cdots$$

ersetzt, deren erste Ziffer $a_\alpha^{(0)}$ bereits reduziert ist. Formt man hierauf $\bar{a}_{\alpha+1}$ in derselben Weise um und fährt so fort, so erhält man die zu a gleiche eindeutig bestimmte reduzierte Zahl mit beliebig vorgegebener Genauigkeit.

Aus der allgemeineren Darstellung (7 a) ergibt sich, daß alle und nur die ganzen π-adischen Zahlen eindeutig auch durch die Elemente der 0-ten, 1-ten, 2-ten, . . . Ordnung

$$1, \pi, \ldots, \pi^{e-1};\ p, p\pi, \ldots, p\pi^{e-1};\ p^2, p^2\pi, \ldots$$

mit modulo p reduzierten Koeffizienten $a_1^{(0)} z_1 + \cdots + a_\mathfrak{f}^{(0)} z_\mathfrak{f}$ darstellbar sind. Ordnet man diese Darstellung nach den $e\mathfrak{f}$ einzelnen Produkten

$$\ldots, z_i \pi^k, \ldots \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \mathfrak{f} \\ k = 0, 1, \ldots, e-1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

so sind ihre Koeffizienten eindeutig bestimmte ganze p-adische Zahlen. Alle und nur die ganzen π-adischen Zahlen sind also durch die $e\mathfrak{f}$ ganzen Elemente (8) eindeutig mit ganzen p-adischen Koeffizienten darstellbar; diese bilden also ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{R}(\pi)$, und ihre Anzahl $e\mathfrak{f}$ muß also $\lambda = ef$ sein. Hieraus folgt somit der Satz:

> Die Anzahl $\mathfrak{f}$ der modulo π linear unabhängigen ganzen Elemente von $\mathfrak{R}(\pi)$ ist stets gleich dem Grade f des Primteilers π; ist $z_1, \ldots, z_f$ eine Basis modulo π, so bilden die $\lambda = ef$ Elemente
>
> $$z_1, \ldots, z_f;\ \pi z_1, \ldots, \pi z_f;\ \ldots;\ \pi^{e-1} z_1, \ldots, \pi^{e-1} z_f$$
>
> stets ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{R}(\pi)$.

Dann und nur dann also wenn $e = 1$ ist, d. h. wenn die rationale Primzahl p auch im Körper $\mathfrak{R}(\pi)$ Primzahl bleibt, sind alle Elemente $z_1, \ldots, z_\lambda$ des ganzen Fundamentalsystemes modulo $\pi = p$ linear unabhängig.

II.

Alle ganzen π-adischen Zahlen $a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \cdots$ bilden modulo π betrachtet ebenfalls einen Zahlkörper, den Kongruenzkörper $\mathfrak{K}\,(\mathrm{mod}\,\pi)$. Derselbe ist ein Oberkörper des Kongruenzkörpers $\mathfrak{K}\,(\mathrm{mod}\,p)$ aller ganzen p-adischen Zahlen $b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots$ modulo p betrachtet.

Der Kongruenzkörper $\mathfrak{K}\,(\mathrm{mod}\,\pi)$ ist algebraisch vom f-ten Grade über dem Kongruenzkörper $\mathfrak{K}\,(\mathrm{mod}\,p)$, weil jedes seiner Elemente $v \equiv a_1^{(0)} z_1 + \cdots + a_f^{(0)} z_f\ (\mathrm{mod}\,\pi)$ eindeutig durch das f-gliedrige Fundamentalsystem $z_1, \ldots, z_f$ darstellbar ist.

Jedes seiner Elemente v genügt also einer Hauptgleichung

$$h(v) = v^f + b_1 v^{f-1} + \cdots + b_f \equiv 0\ (\mathrm{mod}\,\pi)$$

mit modulo p reduzierten ganzen Koeffizienten, deren linke Seite modulo p irreduzibel oder die Potenz einer irreduziblen Funktion $h_0(v)$ ist, je nachdem v ein primitives oder ein nicht primitives Element von $\mathfrak{K}\,(\mathrm{mod}\,\pi)$ ist.

Es sei nun ϱ ein primitives Element dieses Körpers $\mathfrak{K}\,(\mathrm{mod}\,\pi)$; nach dem Abelschen Fundamentalsatze existiert ein solches in jedem algebraischen Körper; und

$$h(t) = t^f + c_1(x, y)\, t^{f-1} + \cdots + c_f(x, y) = 0 \tag{9}$$

sei die modulo p irreduzible Hauptgleichung mit ganzen rationalen modulo p reduzierten Koeffizienten, welcher ϱ modulo π genügt. Dann sind die f Elemente $1, \varrho, \varrho^2, \ldots, \varrho^{f-1}$ modulo π linear unabhängig; sie bilden also, ebenso wie $z_1, z_2, \ldots, z_f$ eine Basis für die ganzen π-adischen Zahlen modulo π. Ersetzt man also diese Basis durch die andere $1, \varrho, \ldots, \varrho^{f-1}$, so ergibt sich für alle π-adischen Zahlen jetzt die reduzierte Darstellung

$$a_s(\varrho)\,\pi^s + a_{s+1}(\varrho)\,\pi^{s+1} + \cdots, \tag{10}$$

deren Koeffizienten $a_i(\varrho)$ ganze Funktionen $(f-1)$-ten Grades von ϱ mit modulo p reduzierten Koeffizienten sind.

Das hier gewählte primitive Element ϱ befriedigt seine Hauptgleichung $h(t) = 0$ nur näherungsweise, denn es ist ja nur $f(\varrho) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\,\pi^{r_0})$, wo r_0 mindestens gleich Eins ist. Man kann aber ϱ durch ein ihm modulo π kongruentes also ebenfalls primitives Element $\varrho' = \varrho + k$ aus $\mathfrak{K}(\pi)$ ersetzen, für welches

$$h(\varrho + k) = h(\varrho) + k h'(\varrho) + k^2 \frac{f''(\varrho)}{2!} + \cdots$$

durch eine höhere als die r_0-te Potenz von π teilbar ist. Berücksichtigt man nämlich, daß alle Ableitungen $\frac{f^{(i)}(\varrho)}{i!}$ für $i = 1, 2, \ldots, f$ die Ordnungszahl 0 besitzen, weil das System (ϱ^h) eine Basis modulo π ist, so erhält man für

$$k = -\frac{h(\varrho)}{h'(\varrho)}$$

in k ein Element der Ordnung $r_0 > 0$ aus $\mathfrak{K}(\pi)$, für welches

$$h(\varrho + k) = k^2 \frac{f''(\varrho)}{2!} + \cdots$$

mindestens die größere Ordnungszahl $2\,r_0$ besitzt.

Durch fortgesetzte Anwendung dieser Annäherungsmethode [welche nichts anderes ist, als die Newtonsche Tangentenmethode zur näherungsweisen Auflösung der Gleichungen, angewandt auf den perfekten π-adischen Körper $\mathfrak{K}(\pi)$] gelangt man zu einem neuen primitiven Elemente aus $\mathfrak{K}(\pi)$, welches eine Wurzel der Gleichung f-ten Grades $h(t) = 0$ ist; wir können und wollen dieses Element durch ϱ bezeichnen und es von vornherein unserer Darstellung (10) der π-adischen Zahlen zugrunde legen.

Zu jedem π-adischen Körper $\mathfrak{K}(\pi)$ des Grades $\lambda = ef$ über $\mathfrak{K}(p)$ gehört also stets ein algebraischer Unterkörper $\mathfrak{K}(\varrho, p)$ vom f-ten Grade über $\mathfrak{K}(p)$, der durch die Gleichung

$h(t) = 0$ aus $\mathfrak{K}(x, y)$ definiert ist, welche in $\mathfrak{K}(\pi)$ eben die Wurzel $t = \varrho$ besitzt. Da diese Gleichung auch *modulo p* irreduzibel ist, da also die f Elemente $1, \varrho, \varrho^2, \ldots, \varrho^{f-1}$ auch modulo π linear unabhängig sind, so ist in diesem Unterkörper $\mathfrak{K}(\varrho, p)$ von $\mathfrak{K}(\pi)$ p selbst eine Primzahl. Alle Zahlen von $\mathfrak{K}(\varrho, p)$ sind also in der Form

$$b_\alpha(\varrho)\, p^\alpha + b_{\alpha+1}(\varrho)\, p^{\alpha+1} + \cdots$$

mit ganzen modulo p reduzierten Funktionen $(f-1)$-ten Grades von ϱ als Koeffizienten eindeutig darstellbar. Dieser Unterkörper $\mathfrak{K}(\varrho, p)$ von $\mathfrak{K}(\pi)$ werde der Koeffizientenkörper des π-adischen Körper $\mathfrak{K}(\pi)$ genannt, weil die Ziffern $a_i(\varrho)$ der Zahlen von $\mathfrak{K}(\pi)$

$$a_\alpha(\varrho)\pi^\alpha + a_{\alpha+1}(\varrho)\pi^{\alpha+1} + \cdots$$

ganze Zahlen eben dieses Körpers $\mathfrak{K}(\varrho, p)$ sind.

Die Zahlen von $\mathfrak{K}(\pi)$ bilden über diesem Koeffizientenkörper $\mathfrak{K}(\varrho, p)$ einen algebraischen Körper e-ten Grades. Jede ganze Zahl b aus $\mathfrak{K}(\pi)$ kann nämlich nach (7 a) eindeutig auch durch die Elemente $1, \pi, \ldots, \pi^{e-1}; p, p\pi, \ldots$ mit modulo p reduzierten ganzen Koeffizienten aus $\mathfrak{K}(\varrho, p)$ dargestellt werden. Ordnet man diese Darstellung nach $1, \pi, \pi^2, \ldots, \pi^{e-1}$, so ergibt sich die eindeutige Darstellung

$$b = b_0(\varrho) + b_1(\varrho)\pi + \cdots + b_{e-1}(\varrho)\pi^{e-1}$$

mit ganzen Koeffizienten $b_i(\varrho)$ aus $\mathfrak{K}(\varrho, p)$. Also ist $\mathfrak{K}(\pi)$ algebraisch vom Grade e über $\mathfrak{K}(\varrho, p)$, und für eine beliebige Primzahl π bilden die e Potenzen $1, \pi, \ldots, \pi^{e-1}$ ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{K}(\pi)$ in bezug auf $\mathfrak{K}(\varrho, p)$. Mithin ist jede Primzahl π ein primitives Element von $\mathfrak{K}(\pi)$ in bezug auf $\mathfrak{K}(\varrho, p)$, d. h. sie genügt in diesem Oberkörper einer irreduziblen Hauptgleichung e-ten Grades. Da $\pi^e = \varepsilon p$ ist, wo ε eine π-adische Einheit ist, so hat diese Hauptgleichung die einfache Form

$$\pi^e = \varepsilon p = (g_0 + g_1\pi + \cdots + g_{e-1}\pi^{e-1})\, p,$$

sie ist also eine Eisensteinsche Gleichung in $\mathfrak{K}(\varrho, p)$.

Auch hier kann man nun diese Primzahl π durch eine andere $\overline{\pi}$ aus $\mathfrak{K}(\pi)$ ersetzen, deren Gleichung in $\mathfrak{K}(\varrho, p)$ ganz besonders einfach nämlich eine reine Gleichung in $\mathfrak{K}(\varrho)$ ist. Schreibt man nämlich die vorige Gleichung für π in der Form

$$\pi^e = g_0 p(1 + \gamma_1\pi + \cdots + \gamma_{e-1}\pi^{e-1}),$$

wo auch die γ_i ganz in $\mathfrak{K}(\varrho, p)$ sind, so kann man die Einseinheit rechts als e-te Potenz einer anderen Einseinheit schreiben, da sich in der Gleichung

$$(1 + x_1\pi + x_2\pi^2 + \cdots)^e = (1 + \gamma_1\pi + \cdots + \gamma_{e-1}\pi^{e-1})$$

die unbekannten Koeffizienten x_i eindeutig und ganz innerhalb $\mathfrak{K}(\varrho, p)$ bestimmen lassen. Tut man dies und ersetzt dann π durch die neue Primzahl

$$\overline{\pi} = \frac{\pi}{1 + x_1\pi + \cdots},$$

so genügt diese der reinen Gleichung aus $\mathfrak{K}(\varrho)$:

$$\overline{\pi}^e = g_0(\varrho)\, p = \bar{p}(\varrho),$$

wo $g_0(\varrho)$ eine bestimmte modulo p reduzierte Einheit modulo p aus $\mathfrak{K}(\varrho)$ bedeutet. Im folgenden will ich die so normierte Primzahl $\overline{\pi}$ zugrundelegen und sie gleich durch π bezeichnen.

III.

Die soeben durchgeführte Untersuchung hatte ergeben, daß die in $\mathfrak{K}(p)$ irreduzible Gleichung λ-ten Grades

$$f(z, p) = 0 \tag{11}$$

in dem eindeutig bestimmten kleinsten Erweiterungskörper $\mathfrak{K}(\pi)$ von $\mathfrak{K}(p)$ eine π-adische Wurzel

$$\zeta = b_\alpha(\varrho)\pi^\alpha + b_{\alpha+1}(\varrho)\pi^{\alpha+1} + \cdots \tag{12}$$

besitzt. Dieser Körper $\mathfrak{K}(\pi)$ ist algebraisch vom Grade λ über $\mathfrak{K}(p)$; sind e und f Ordnung und Grad der Primzahl π, so besitzt $\mathfrak{K}(\pi)$ als Koeffizientenkörper $\mathfrak{K}(\varrho, p)$ einen algebraischen Körper f-ten Grades über $\mathfrak{K}(p)$, welcher durch die modulo p irreduzible Gleichung f-ten Grades aus $\mathfrak{K}(x, y)$:

$$h(t) = t^f + c_1(xy)\,t^{f-1} + \cdots + c_f(xy) = 0 \tag{13}$$

mit modulo p reduzierten Koeffizienten definiert ist, und seine Primzahl π ist durch die reine Gleichung e-ten Grades

$$\tau^e = \overline{p}(\varrho) = g_0(\varrho)\,p \tag{14}$$

bestimmt, wo $g_0(\varrho)$ eine modulo p reduzierte Einheit aus $\mathfrak{K}(\varrho)$ bedeutet.

Die Gleichung (11) besitzt aber neben dieser einen im ganzen genau λ verschiedene Wurzeln in einem geeignet gewählten Erweiterungskörper von $\mathfrak{K}(p)$, und ich hatte in Nr. III der ersten Abhandlung den Weg angegeben, um durch sukzessive Erweiterungen von $\mathfrak{K}(\pi)$ diese λ Wurzeln zu finden. Ich will aber jetzt ein direktes Verfahren zu ihrer Bestimmung geben, um nun den zwischen ihnen bestehenden engen algebraischen Zusammenhang zu finden.

Es sei

$$h(t) = (t - \varrho_1)(t - \varrho_2)\ldots(t - \varrho_f) \tag{15}$$

die vollständige Zerlegung der modulo p irreduziblen Hauptfunktion $h(t)$ in ihre Linearfaktoren im kleinsten π-adischen Erweiterungskörper von $\mathfrak{K}(p)$. Eine von ihren f Nullstellen, etwa ϱ_1, ist die vorher eingeführte Zahl ϱ aus unserem π-adischen Auflösungskörper $\mathfrak{K}(\pi)$. Durch $\varrho_1, \ldots, \varrho_f$ werden dann f konjugierte p-adische algebraische Erweiterungskörper f-ten Grades

$$\mathfrak{K}(\varrho_1, p),\ \mathfrak{K}(\varrho_2, p), \ldots, \mathfrak{K}(\varrho_f, p) \tag{15 a}$$

von $\mathfrak{K}(p)$ bestimmt, von denen der erste $\mathfrak{K}(\varrho_1, p)$ der vorher betrachtete Koeffizientenkörper $\mathfrak{K}(\varrho, p)$ unseres π-adischen Auflösungskörpers $\mathfrak{K}(\pi)$ ist. In ihnen allen bleibt p selbst Primzahl, weil die ihnen gemeinsame Grundfunktion $h(t)$ auch modulo p irreduzibel ist. Ist $g(\varrho_1)$ in $\mathfrak{K}(\varrho_1, p)$ eine Einheit, so sind alle konjugierten $g(\varrho_i)$ in $\mathfrak{K}(\varrho_i, p)$ ebenfalls Einheiten.

In jedem von diesen f Körpern $\mathfrak{K}(\varrho_i, p)$ betrachte ich nun die zu der in (14) aufgestellten konjugierte reine Gleichung e-ten Grades

$$\tau^e = \bar{p}(\varrho_i) = g_0(\varrho_i)\,p \tag{16}$$

und bezeichne ihre e konjugierten Wurzeln, welche sich ja nur um e-te Einheitswurzeln von einander unterscheiden, und welche alle bis auf eine Einheit $g_0(\varrho_i)^{\frac{1}{e}}$ gleich $p^{\frac{1}{e}}$ sind, durch

$$\pi_{i1}, \pi_{i2}, \ldots, \pi_{ie}\,. \qquad (i = 1, 2, \ldots f) \tag{16 a}$$

Dann ist eine der e Primzahlen der ersten Reihe $\pi_{11}, \pi_{12}, \ldots, \pi_{1e}$, etwa π_{11}, die Primzahl π unseres Auflösungskörpers $\mathfrak{K}(\pi)$.

Wir erhalten dann $ef = \lambda$ zu dem vorher betrachteten Körper $\mathfrak{K}(\pi) = \mathfrak{K}(\varrho_1, \pi_{11})$ konjugierte π-adische Körper

$$\mathfrak{K}(\pi_{gh}) = \mathfrak{K}(\varrho_g, \pi_{gh})\,.$$

Jeder einzelne von diesen Körpern $\mathfrak{K}(\pi_{gh})$ besteht aus allen und nur den Zahlen:

$$y_\beta(\varrho_g)\,\pi_{gh}^\beta + y_{\beta+1}(\varrho_g)\,\pi_{gh}^{\beta+1} + \cdots,$$

deren Ziffern $y_\beta(\varrho_g), y_{\beta+1}(\varrho_g), \ldots$ dem Koeffizientenkörper $\mathfrak{K}(\varrho_g, p)$ angehören und deren Primzahl π_{gh} eine der e Wurzeln der reinen Gleichung $\tau^e = g_0(\varrho_i)\,p$ ist. Der erste $\mathfrak{K}(\pi_{11})$ ist der Körper $\mathfrak{K}(\pi)$, in welchem die Grundgleichung $f(z) = 0$ die Wurzel (12):

$$\zeta = \zeta_{11} = b_\alpha(\varrho_1)\pi_{11}^\alpha + b_{\alpha+1}(\varrho_1)\,\pi_{11}^{\alpha+1} + \cdots$$

enthielt.

Nun ergibt sich unmittelbar, daß die ef zu ζ_{11} konjugierten Zahlen in den ef konjugierten Körpern $\mathfrak{K}(\pi_{gh})$:

$$\zeta_{gh} = b_\alpha(\varrho_g)\,\pi_{gh}^\alpha + b_{\alpha+1}(\varrho_g)\,\pi_{gh}^{\alpha+1} + \cdots$$

sämtlich ebenfalls Wurzeln jener Gleichung $f(z, p) = 0$ sind, und daß für sie die Primfunktion $f(z)$ vollständig in die λ Linearfaktoren

$$f(z) = \prod_{gh}(z - \zeta_{gh})$$

zerfällt. In der Tat ist ja die rechte Seite als symmetrische Funktion der $\lambda = ef$ Elementenpaare (ϱ_g, π_{gh}) eine ganze p-adische Funktion λ-ten Grades, welche mit der Primfunktion $f(z)$ mindestens den Linearfaktor $z - \zeta_{11}$ gemeinsam hat, also notwendig mit ihr identisch ist.

So erhält man die Wurzeln ζ_{gh} einer jeden Gleichung $f(z, p) = 0$ als einen einzigen Zyklus, dessen Wurzeln aus ihrer ersten durch Ersetzung des Systemes (ϱ_1, π_{11}) durch seine λ konjugierten (ϱ_g, π_{gh}) hervorgehen. Sie alle besitzen dieselbe Ordnungszahl α, sind also alle äquivalent $p^{\frac{\alpha}{e}}$, da alle ihre konjugierten Anfangskoeffizienten $b_\alpha(\varrho_g)$ Einheiten modulo p sind, und sie sind alle von einander verschieden, da das Produkt $\prod_{gh}(z - \zeta_{gh}) = f(z, p)$ in $\mathfrak{K}(p)$ irreduzibel ist.

Die sämtlichen Wurzeln der Grundgleichung $F(z) = 0$ für den Bereich der rationalen Primfunktion $p(x, y)$ zerfallen also in ν Zyklen von je $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ π-adischen Wurzeln entsprechend den ν p-adischen Primfaktoren $f_i(z, p)$, in welche sich die Grundfunktion $F(z)$ im p-adischen Zahlkörper $\mathfrak{K}(p)$ zerlegt.

IV.

Die bisherigen Ergebnisse lehrten uns die Natur der algebraischen Funktionen von x, y „im Kleinen", d. h. für den Bereich einer einzelnen beliebig angenommenen rationalen Primfunktion $p(x, y)$ kennen. Ich benutze sie, um nun die Einsicht in ihre Natur „im Großen", d. h. für den Bereich aller rationalen Primfunktionen $p(x, y), q(x, y), \ldots$ zusammen, zu gewinnen. Dies geschieht dadurch, daß ich diesen Primfunktionen gewisse algebraische Primdivisoren zuordne und dann die algebraischen Funktionen z durch diese Primdivisoren und durch die aus ihnen zusammengesetzten algebraischen Divisoren vollständig und einfach charakterisiere. Ich sage zuerst einige Worte über das entsprechende einfachere Problem im Körper $\mathfrak{K}(x, y)$ der rationalen Funktionen von x und y.

Jeder rationalen Primfunktion $p(x, y), q(x, y), \ldots$ aus $\mathfrak{K}(x, y)$ ordne ich einen rationalen Primdivisor $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ zu, mit der Maßgabe, daß ein Element $a(x, y)$ dieses Körpers genau eine Potenz $\mathfrak{p}^\alpha$ oder $\mathfrak{q}^\beta \ldots$ enthält, wenn $a = \varepsilon p^\alpha$ oder $a = \zeta q^\beta \ldots$ ist, wo ε oder $\zeta \ldots$ je eine Einheit modulo p oder modulo $q \ldots$ ist. Enthält a genau den Divisor $\mathfrak{p}^\alpha$ und genau den Divisor $\mathfrak{q}^\beta \ldots$, so soll dies durch den Ausspruch festgestellt werden, daß a durch den Divisor $\mathfrak{d} = \mathfrak{p}^\alpha \mathfrak{q}^\beta \cdots$ genau teilbar ist. Es gibt so viele Primdivisoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ als es Primfunktionen $p(x, y), q(x, y), \ldots$, d. h. irreduzible ganze Funktionen, gibt, und die beiden gebrochenen Primfunktionen $p_\infty(x) = \frac{1}{x}$, $p_\infty(y) = \frac{1}{y}$, und jedem Elemente a entspricht ein eindeutig bestimmter Divisor $\mathfrak{d}_a = \mathfrak{p}^\alpha \mathfrak{q}^\beta \cdots \mathfrak{r}^\gamma$, welcher genau angibt, welche Primfunktionen $p(x, y), q(x, y), \ldots$ in a in einer positiven oder negativen Potenz enthalten sind. Alle übrigen Primfunktionen $s(x, y), \ldots$ sind dann in a gar nicht enthalten. Durch den Divisor $\mathfrak{d}_a$ ist ein Element $a(x, y)$ bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig bestimmt.

Ich führe jetzt neben dem rationalen Zahlkörper $\mathfrak{K}(x, y)$ den algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}(z; x, y)$ ein und zeige, daß und wie auch seine Elemente vollständig und eindeutig durch ihre sog. algebraischen Divisoren charakterisiert werden können.

Er sei wieder $\mathfrak{K}(x,y)$ der Körper aller rationalen Funktionen von x und y, und z sei ein neues Element, welches mit x, y durch eine beliebige irreduzible Gleichung n-ten Grades in $\mathfrak{K}(x,y)$:

$$F(z;x,y) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{17}$$

zusammenhängt. Ich betrachte nun den Erweiterungskörper $\mathfrak{K}(z;x,y)$ von $\mathfrak{K}(x,y)$, d. h. den Körper aller modulo $F(z)$ ganzen Funktionen von z mit beliebigen Koeffizienten aus $\mathfrak{K}(x,y)$. Er ist isomorph zu dem Kongruenzkörper $\mathfrak{K}_F(z;x,y)$ aller dieser Funktionen, modulo $F(z)$ betrachtet, und wir können und wollen daher diesen Kongruenzkörper weiter der Untersuchung zugrunde legen.

Der Kongruenzkörper $\mathfrak{K}_F(z;x,y)$ ist algebraisch vom n-ten Grade über $\mathfrak{K}(x,y)$, weil in ihm ja n linear unabhängige Elemente, z. B. die Elemente $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$ existieren, während je $n+1$ Elemente linear abhängig sind. Jedes Element $v = \varphi(z)$, $w = \psi(z), \ldots$ dieses Körpers genügt also, ebenso wie z selbst, einer Hauptgleichung $G(v;x,y) = 0$, $H(w;x,y) = 0, \ldots$ n-ten Grades in $\mathfrak{K}(x,y)$, welche selbst irreduzibel oder die Potenz einer irreduziblen Funktion ist, je nachdem v oder $w \ldots$ ein primitives oder ein nicht primitives Element der Kongruenzkörpers ist.

Die Untersuchung der Hauptgleichung $G(v;x,y) = 0$ für ein beliebiges Element $v = \varphi(z)$ des Körpers $\mathfrak{K}(z;x,y)$ in bezug auf eine beliebige Primfunktion $p(x,y)$ liefert nun in genau demselben π-adischen Erweiterungskörper $\mathfrak{K}(\pi)$ von $\mathfrak{K}(p)$ genau die entsprechende Zerlegung von $G(v)$ in π-adische Linearfaktoren, wie sie sich soeben für die Hauptfunktion $F(z)$ ergeben hatte.

Zerfällt nämlich $F(z)$ in dem Galoisschen Oberkörper $\mathfrak{K}(\pi)$ von $\mathfrak{K}(p)$ in das Produkt der n π-adischen Linearfaktoren:

$$F(z) = \prod_i (z - z_i)\,,$$

wo also die n π-adischen Wurzeln dieser Hauptgleichung eindeutig bestimmte π-adische Zahlen

$$z_i = a_{\alpha_i}\pi^{\alpha_i} + a_{\alpha_i+1}\pi^{\alpha_i+1} + \cdots$$

sind, so zerfällt in demselben π-adischen Körper die Hauptfunktion $G(v)$ für ein beliebiges anderes Element $v = \varphi(z)$ unseres algebraischen Körpers ebenfalls vollständig

$$G(v) = \prod_i (v - v_i),$$

und ihre n Wurzeln sind die π-adischen Zahlen

$$v_i = \varphi(z_i) = b_{\beta_i}\pi^{\beta_i} + b_{\beta_i+1}\pi^{\beta_i+1} + \cdots\,^{1})\,.$$

Auch hier zerfallen also die n π-adischen Wurzeln $v_1, v_2, \ldots, v_n$ in genau ν Zyklen von je λ_i konjugierten Wurzeln gleicher Ordnungszahl entsprechend den ν p-adischen Primfaktoren $f_i(z,p)$ der Grundfunktion $F(z)$.

Um nun allen Elementen $z, v, w, \ldots$ des algebraischen Körpers $\mathfrak{K}(z;x,y)$ ebenfalls je einen algebraischen Divisor $\mathfrak{D}_z, \mathfrak{D}_v, \mathfrak{D}_w, \ldots$ zuzuordnen, verfahre ich folgendermaßen: Es sei $p(x,y)$ wie vorher eine beliebige rationale Primfunktion, $\mathfrak{p}$ der zugehörige rationale Primdivisor. Dann ordne ich jedem der ν zu p gehörigen p-adischen Primfaktoren $f_1(z,p), \ldots, f_\nu(z,p)$ von $F(z)$ je einen zu $\mathfrak{p}$ gehörigen algebraischen Primteiler $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_\nu$ zu, mit der Maßgabe, daß ein Element v genau durch $\mathfrak{P}_i^{\alpha_i}$ teilbar heißen soll, wenn der zu $\mathfrak{P}_i$ gehörige Wurzelzyklus von v genau von der Ordnung α_i ist.

So erhält man entsprechend jedem rationalen Primdivisor $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ immer eine Reihe von algebraischen Primteilern $\mathfrak{P}_h, \mathfrak{Q}_i, \ldots$, und so ergibt sich eine vollständige Reihe aller algebraischen Primteiler $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \ldots$, von denen jeder zu je einem der

[1]) Für den Beweis dieser Tatsache vgl. K. Hensel, Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen, Math. Zeitschrift Bd. 2 (1918), S. 434—438.

rationalen Primdivisoren gehört, und man kann für eine beliebige algebraische Zahlgröße v bestimmen, welche Potenz von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, ... jedesmal genau in ihr enthalten ist, denn zu jedem Primteiler gehört ein eindeutig bestimmter Wurzelzyklus von v mit einer eindeutig bestimmten endlichen Ordnungszahl.

Enthält v erstens $\mathfrak{P}^\alpha$, zweitens $\mathfrak{Q}^\beta$ genau, so heißt v genau teilbar durch den algebraischen Divisor $\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^\alpha \mathfrak{Q}^\beta$. Bestimmt man für ein Element v für jeden Primteiler $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, ... die in ihm genau enthaltene Potenz $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ desselben, so ergibt sich ein v zugeordneter Divisor $\mathfrak{D}_v = \mathfrak{P}^\alpha \mathfrak{Q}^\beta \mathfrak{R}^\gamma \cdots$, welcher vollständige Auskunft gibt über die Ordnungszahlen aller zu v gehörigen Wurzelzyklen in allen zu jeder Primfunktion $p, q, r, \ldots$ gehörigen Erweiterungskörpern. Ist einer der Exponenten $\alpha = 0$, so heißt das, daß der zu $\mathfrak{P}$ gehörige Wurzelzyklus aus konjugierten π-adischen Einheiten besteht. Eine solche Potenz $\mathfrak{P}^0$ kann aus dem Divisor $\mathfrak{D}_v$ auch fortgelassen werden.

Gehören zu v und w die Divisoren $\mathfrak{D}_v$ und $\mathfrak{D}_w$, so gehören zu vw und $\frac{v}{w}$ die Divisoren $\mathfrak{D}_v \mathfrak{D}_w$ und $\frac{\mathfrak{D}_v}{\mathfrak{D}_w}$, da dasselbe ja für jede einzelne Primteilerpotenz von v und w der Fall ist.

Von besonderer Bedeutung ist nun die Tatsache, daß alle zu den Elementen $z, v, w, \ldots$ gehörenden Divisoren $\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^\alpha \mathfrak{Q}^\beta \cdots \mathfrak{R}^\gamma$ endlich sind, d. h. nur eine endliche Anzahl von Primteilern $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, ..., $\mathfrak{R}$ in von Null verschiedener Potenz enthalten. Man braucht dies nur für die ganzen Primfunktionen $p(x, y), q(x, y), \ldots$ zu beweisen, denn zu den beiden gebrochenen rationalen Primfunktionen $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ gehören ja überhaupt nur endlich viele algebraische Primteiler $\mathfrak{P}_i^{(\infty)}(x)$ und $\mathfrak{P}_k^{(\infty)}(y)$.

Um den Satz nun für alle ganzen algebraischen Primteiler zu beweisen, schreibe ich die Hauptgleichung für v in der primitiven Form

$$G(v) = a_0(x, y)\, v^n + a_1(x, y)\, v^{n-1} + \cdots + a_n(x, y) = 0 \tag{18}$$

mit ganzen teilerfremden Koeffizienten. Zerfällt nun $G(v)$ in einem Erweiterungskörper von $\mathfrak{K}(x, y)$ überhaupt in Faktoren niedrigeren Grades, so zerfällt es nach dem Gaußschen Zerlegungssatze auch in primitive Faktoren. Für eine beliebige ganze Primfunktion p zerfällt aber in einem geeigneten π-adischen Galoisschen Körper $G(v)$ in n Linearfaktoren, $v - v_i$ und diese sind primitiv, wenn v_i von nicht negativer Ordnung ist; ist dagegen v_k von negativer Ordnung, so ist der zugehörige Linearfaktor in der Form $\frac{v}{v_k} - 1$ primitiv.

Also ergibt sich für $G(v)$ die folgende Zerlegung in primitive Linearfaktoren:

$$G(v) = a_0(x, y)\, v^n + \cdots + a_n(x, y) = \prod_i (v - v_i) \prod_k \left(\frac{v}{v_k} - 1\right),$$

und durch Vergleichung der äußersten Glieder auf beiden Seiten erhält man die für jeden ganzen Primfaktor $p(x, y)$ gültige Äquivalenz

$$a_0 a_n \sim \frac{\prod_i v_i}{\prod_k v_k}, \tag{19}$$

erstreckt auf alle Wurzeln von nicht negativer Ordnung im Zähler und von negativer Ordnung im Nenner.

Die $\lambda = ef$ Wurzeln jedes einzelnen zu einem bestimmten Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ gehörigen Zyklus $v_i = a_\alpha(\varrho_i)\, \pi_{ik}^\alpha + \cdots$ enthalten nun alle genau $p^{\frac{\alpha}{e}}$, ihr Produkt also $p^{f\alpha}$, wo $\alpha \geqq 0$ oder $\alpha < 0$ ist, je nachdem die betreffenden Wurzeln im Zähler oder im Nenner der Gleichung (19) vorkommen. Hieraus folgt also, daß diese Äquivalenz für jede ganze Primfunktion so geschrieben werden kann:

$$a_0(x, y)\, a_n(x, y) \sim p^{f_1|\alpha_1| + f_2|\alpha_2| + \cdots + f_\nu|\alpha_\nu|}, \tag{20}$$

wenn v genau durch $\mathfrak{P}_1^{\alpha_1}\,\mathfrak{P}_2^{\alpha_2}\cdots\mathfrak{P}_\nu^{\alpha_\nu}$ teilbar ist. Dann und nur dann enthält also der Divisor $\mathfrak{D}_v$ wenigstens einen der ν zu $p(x,y)$ gehörigen algebraischen Divisoren $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_\nu$ in einer von Null verschiedenen Potenz, wenn $p(x,y)$ ein Teiler von $(a_0(x,y)\,a_n(x,y))$ ist, und da dieses Produkt nur eine endliche Anzahl von ganzen Primfaktoren enthält, so ist unsere Behauptung bewiesen.

Auch für die algebraischen Primteiler, welche zu den beiden gebrochenen rationalen Primfunktionen $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ gehören, kann der analoge Satz aus dem soeben Bewiesenen leicht abgelesen werden. Es seien nämlich $\mathfrak{P}_1^{(\infty)},\ldots,\mathfrak{P}_\nu^{(\infty)}$ etwa die zu $\frac{1}{y}$ gehörigen algebraischen Primdivisoren. Für diesen ist die Form (18) der Hauptfunktion $G(v)$ noch nicht die primitive, da ihre Koeffizienten $a_i(x,y)$ nicht ganz für den Bereich von $\frac{1}{y}$ sind, sondern die Ordnungszahlen $-\nu_i$ haben, wenn ν_i den Grad der ganzen Funktion $a_i(x,y)$ in y bedeutet. Sie geht aber durch Multiplikation mit $\left(\frac{1}{y}\right)^{\bar\nu}$ in die primitive Form über, wenn $\bar\nu=\max(\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)$ die größte unter diesen Gradzahlen bedeutet. Wendet man nun den vorigen Satz auf diese modulo $\frac{1}{y}$ primitive Hauptfunktion:

$$\left(\frac{1}{y}\right)^{\bar\nu}G(v)=\bar a_0 v^n+\bar a_1 v^{n-1}+\cdots+\bar a_n$$

an, so ergibt sich, daß

$$\bar a_0(x,y)\bar a_n(x,y)=\left(\frac{1}{y}\right)^{2\bar\nu}a_0 a_n\sim\left(\frac{1}{y}\right)^{f_1|\alpha_1|+\cdots+f_\nu|\alpha_\nu|}$$

ist, wenn v genau durch $\mathfrak{P}^{(\infty)\alpha_1}\cdots\mathfrak{P}_\nu^{(\infty)\alpha_\nu}$ teilbar ist. Für diese Exponenten $\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$ besteht also hier die Gleichung

$$f_1|\alpha_1|+\cdots+f_\nu|\alpha_\nu|=2\bar\nu-(\nu_0+\nu_n). \tag{21}$$

Zu jedem Elemente $z,v,w,\ldots$ des algebraischen Körpers $\mathfrak{K}(z;x,y)$ gehört somit je ein eindeutig bestimmter endlicher Divisor $\mathfrak{D}_z,\mathfrak{D}_v,\mathfrak{D}_w,\ldots$ Umgekehrt ist aber jedes solche Element v durch seinen Divisor $\mathfrak{D}_v$ bis auf eine multiplikative Konstante in $\mathfrak{K}(z;x,y)$ eindeutig bestimmt. Gehörten nämlich zu demselben Divisor $\mathfrak{D}$ zwei verschiedene Elemente v und v', so wäre ihr Quotient $\bar v=\frac{v'}{v}$ ein Element unserers Körpers, zu dem der Divisor $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}=1$ gehörte, d. h. $\bar v$ enthielte keinen einzigen algebraischen Primdivisor. Ist dann

$$G(\bar v)=a_0\bar v^n+a_1\bar v^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

die Hauptgleichung für $\bar v$ in der primitiven Form, so muß die ganze Funktion $a_0(x,y)\,a_n(x,y)$ eine Konstante sein, weil sie keine ganze Primfunktion enthalten kann; also sind auch a_0 und a_n selbst Konstanten. Aber auch alle anderen Koeffizienten $a_i(x,y)$ müssen Konstanten sein; denn enthielte auch nur eine von ihnen etwa y in positiver Potenz, so wäre die vorher eingeführte Zahl $\bar\nu$ positiv, ν_0 und ν_n sind aber Null, also ergäbe sich aus (21), daß $\bar v$ mindestens einen der zu $\frac{1}{y}$ gehörigen Primdivisoren $\mathfrak{P}_i^{(\infty)}$ enthalten müßte, im Widerspruch mit unserer Voraussetzung.

V.

Die bis jetzt durchgeführten Untersuchungen haben ergeben, daß die Hauptgleichung $G(v)=0$ für irgendein Element v des algebraischen Körpers $\mathfrak{K}(z;x,y)$ für den Bereich einer beliebigen Primfunktion $p(x,y)$, d. h. im kleinsten π-adischen Galoisschen Oberkörper $\mathfrak{K}(\pi)$ von $\mathfrak{K}(p)$ n π-adische Wurzeln $v_1\,v_2,\ldots,v_n$ besitzt.

Von entscheidender Wichtigkeit ist nun die Tatsache, daß diese π-adischen Potenzreihen v_i für jede in genügender Nähe der Kurve C_p $(p(x, y) = 0)$ gelegene Stelle (x, y), d. h. für genügend kleine Werte von $\bar{p}$, oder, was dasselbe ist, von $\pi = \bar{p}^{\frac{1}{e}}$, gleichmäßig konvergieren und in einer positiven Umgebung jedes beliebigen Punktes der Kurve C_p die n Gleichungswurzeln zahlenmäßig darstellen.

Ich will diesen Beweis für eine, etwa die erste Wurzel v_1 der Hauptgleichung $G(v) = 0$ führen. Dabei kann und will ich voraussetzen, daß nur v_1 von positiver, alle anderen Wurzeln $v_2, \ldots, v_n$ aber von negativer Ordnungszahl sind. Ist dies nämlich nicht der Fall, so betrachte ich an Stelle unseres Elementes v ein anderes

$$\bar{v} = \frac{v - v_1^{(0)}}{\pi^s},$$

wo $v_1^{(0)}$ ein Näherungswert genügend hoher Ordnung s dieser ersten Wurzel v_1 sein soll. Die Gleichung $\bar{G}(\bar{v}) = G(v_1^{(0)} + \pi^s \bar{v}) = 0$ ist ganz und rational in $\bar{v}$ π und ϱ, und sie besitzt die n Wurzeln $\bar{v}_i = \dfrac{v_i - v_1^{(0)}}{\pi^s}$, von denen die erste

$$\bar{v}_1 = \frac{v_1 - v_1^{(0)}}{\pi^s} = e_{s+1}\pi + e_{s+2}\pi^2 + \cdots$$

abgesehen vom Faktor π^s das Restglied von v_1 und von positiver Ordnung ist, während die $n - 1$ anderen für ein genügend großes s sicher negative Ordnungszahl haben, da ja $v_2, v_3, \ldots, v_n$ von v_1 verschieden sind. Mit dem Nachweis der Konvergenz dieses Restgliedes $\bar{v}_1$ ist dann auch die Konvergenz von v_1 erwiesen.

Ich will also jetzt von vornherein voraussetzen, daß

$$v_1 = \varepsilon_1 \pi^{\varrho_1},\ v_2 = \varepsilon_2 \pi^{-\varrho_2}, \ldots, v_n = \varepsilon_n \pi^{-\varrho_n}$$

ist, wo alle ganzen Zahlen ϱ_i positiv sind.

Dann zerfällt also die primitive Grundgleichung $G(v) = 0$ in die n primitiven Linearfaktoren:

$$G(v) = (v - \varepsilon_1 \pi^{\varrho_1})\,(\pi^{\varrho_2} v - \varepsilon_2) \cdots (\pi^{\varrho_n} v - \varepsilon_n) = 0\,, \tag{22}$$

und die Entwicklung nach Potenzen von π und v liefert, wie die linke Seite zeigt, eine abbrechende Gleichung

$$G(v) = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} \pi^\alpha v^\beta = 0\,.$$

Die rechte Seite von (22) zeigt aber, daß $a_{00} = 0$, a_{01} dagegen eine Einheit modulo π ist, daß diese Gleichung also so geschrieben werden kann:

$$a_{10}\pi + a_{01} v + \sum_{i+k=2,3,\ldots} a_{ik} \pi^i v^k = 0\,.$$

Ihre Auflösung nach v liefert also für (22) eine Gleichung mit ganzen Koeffizienten:

$$v = g_{10}\pi + \sum_{i+k=2,\ldots} g_{ik} \pi^i v^k\,, \tag{23}$$

in welcher nur eine endliche Anzahl von Koeffizienten $g_{\alpha\beta}$ auftreten.

Diese Gleichung besitzt also die n Lösungen $v_1, \ldots, v_n$, von denen nur die erste

$$v_1 = e_1\pi + e_2\pi^2 + \cdots \tag{24}$$

von positiver Ordnung ist. Ihre Koeffizienten bestimmen sich aus der Gleichung

$$e_1\pi + e_2\pi^2 + \cdots = g_{10}\pi + \sum_{i+k=2,\ldots} g_{ik} \pi^i (e_1\pi + e_2\pi^2 + \cdots)^k$$

eindeutig sukzessive durch Koeffizientenvergleichung. Man erkennt nämlich unmittelbar, daß sich für jedes e_k eine Gleichung

$$e_k = G_k(g_{\alpha\beta}, e_1, e_2, \ldots, e_{k-1})$$

ergibt, wo die rechte Seite aus den $g_{\alpha\beta}$ und den vorangehenden $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ allein durch die endlich oft angewendeten Operationen der Addition und Multiplikation zusammen-

gesetzt ist; also ergeben sich aus ihnen die eindeutig bestimmte Auflösungsgleichungen

$$e_k = H_k(g_{\alpha\beta}), \tag{25}$$

deren rechte Seiten allein aus den $g_{\alpha\beta}$ in gleicher Weise gebildet sind.

Zum Beweise nun, daß die so eindeutig bestimmte Potenzreihe (24) wirklich einen positiven Konvergenzbereich hat, vergleiche ich sie mit einer anderen konvergenten Potenzreihe mit positiven Koeffizienten

$$\bar{v}_1 = \bar{e}_1\pi + \bar{e}_2\pi^2 + \cdots,$$

für welche alle $\bar{e}_i > |e_i|$ sind. Dann ist ja auch die Reihe v_1 mindestens im Konvergenzbereiche von $\bar{v}_1$ konvergent.

Wir finden eine solche Majorante $\bar{v}_1$ für unsere Reihe v_1 leicht folgendermaßen: Es sei g der Maximalwert aller $|g_{\alpha\beta}|$; dann werde $\bar{v}_1$ definiert als die Lösung positiver Ordnung in π der Gleichung

$$\bar{v}_1 = g(\pi + \sum_{i+k=2,\ldots}^{\infty} \pi^i \bar{v}_1^k), \tag{26}$$

welche aus (23) dadurch hervorgeht, daß dort alle Koeffizienten $g_{\alpha\beta}$ durch g ersetzt werden. Dann gehen die aus ihnen wie vorher bestimmten Koeffizienten $\bar{e}_k$ aus den entsprechenden (25) für die $e_k = H_k(g_{\alpha\beta})$ durch dieselbe Ersetzung hervor. Wegen der Natur der ganzen Funktionen H_k sind also alle so gewonnenen $\bar{e}_k$ wirklich positiv und größer als die entsprechenden $|e_k|$.

Andererseits konvergiert aber die so bestimmte Majorante $\bar{v}_1 = \bar{e}_1\pi + \bar{e}_2\pi^2 + \cdots$ innerhalb eines leicht angebbaren Bereiches. Denn für alle $|\pi| < 1$ und $|\bar{v}_1| < 1$ kann ja die Gleichung (26) für $\bar{v}_1$ in der Form geschrieben werden:

$$\bar{v}_1 = g\left(\frac{1}{(1-\pi)(1-\bar{v}_1)} - (1+\bar{v}_1)\right);$$

$\bar{v}_1$ ist also eine der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$A\bar{v}_1^2 - \bar{v}_1 + B = 0,$$

in welcher $A = 1 + g$, $B = \frac{g\pi}{1-\pi}$ gesetzt ist; d. h. es ist

$$\bar{v}_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4AB}}{2A},$$

denn diese und nur diese Wurzel ist von positiver Ordnung in π. Für alle Werte von π, für welche $|4AB| < 1$, oder also

$$|\pi| < \frac{1}{(1+2g)^2} \tag{27}$$

ist, ist aber $\bar{v}_1$ in eine konvergente π-adische Reihe entwickelbar; in diesem immer positiven Bereiche konvergiert also auch die erste und damit jede Wurzel der Hauptgleichung für das beliebig ausgewählte Element v des algebraischen Körpers $\mathfrak{R}(z; x, y)$.

In demselben Bereiche $|\pi| < \frac{1}{(1+2g)^2}$ ist diese gleichmäßig konvergente Reihe $v_1 = e_1\pi + e_2\pi^2 + \cdots$ auch der Größe nach die eine der n Wurzeln, welche die Gleichung $G(v) = 0$ an der betreffenden Stelle hat. In der Tat wird ja dann $G(v_1)$ eine ganze rationale Funktion der gleichmäßig konvergenten Reihe v_1, also selbst eine gleichmäßig konvergente Reihe $h_0 + h_1\pi + h_2\pi^2 + \cdots$; und da alle ihre Koeffizienten $h_i = 0$ sind, so ist $G(v_1) = 0$.

Damit ist die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen vollständig und streng begründet.

Eingegangen 19. März 1932.